

SÉRIE A, N° 3882

N° D'ORDRE :
4733

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JEAN-MICHEL DOLIQUE

1^{re} THÈSE. — COLLISIONS DANS LES PLASMAS A IONS CHAUDS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 mai 1962 devant la Commission d'examen.

MM. GRIVET

Président.

DELCROIX

BLAQUIÈRE

} *Examineurs.*

SÉRIE A, N° 3882

N° D'ORDRE :
4733

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES PHYSIQUES

PAR

JEAN-MICHEL DOLIQUE

1^{re} THÈSE. — COLLISIONS DANS LES PLASMAS A IONS CHAUDS.

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

Soutenues le 10 mai 1962 devant la Commission d'examen.

MM. GRIVET

Président.

DELCROIX }
BLAQUIÈRE }

Examineurs.



FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen..... M. ZAMANSKY.

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T	Analyse supérieure et Algèbre supérieure.	JACQUINOT.....	T	Spectroscopie et physique céleste (Orsay).
DE BROGLIE.....	T	Théories physiques.	VASSY.....	T	Physique de l'Atmosphère.
PRENANT.....	T	Anatomie et Histologie comparées.	DESTOUCHES.....	T	Théories physiques.
GRASSÉ.....	T	Évolution des êtres organisés.	AMIEL.....	T	Chimie générale.
PRÉVOST.....	T	Chimie organique.	HOCART.....	T	Minéralogie et cristallographie.
CHAUDRON.....	T	Chimie appliquée.	J.-P. MATHIEU.....	T	Physique (Optique).
WYART.....	T	Minéralogie et Cristallographie.	COUTEAUX.....	T	Biologie animale (P. C. B.).
TEISSIER.....	T	Zoologie.	MAY.....	T	Zoologie (Orsay).
MANGENOT.....	T	Biologie végétale (Orsay).	CHOQUET.....	T	Théorie des fonctions et Topologie.
AUGER.....	T	Physique quantique et Relativité.	FELDMANN.....	T	Biologie végétale marine.
MONNIER.....	T	Physiologie générale.	GUINIER.....	T	Physique des solides (Orsay).
PIVETEAU.....	T	Paléontologie.	JOST.....	T	Physiologie comparée.
ROCARD.....	T	Physique (E. N. S.).	FORTET.....	T	Calcul des Probabilités et physique mathématique.
CARTAN.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	SCHWARTZ.....	T	Calcul différentiel et intégral.
LAFFITTE.....	T	Chimie générale.	CHOUARD.....	T	Physiologie végétale.
FAVARD.....	T	Géométrie supérieure.	MALAVARD.....	T	Aviation (Techn. Aéronaut.).
COULOMB.....	T	Physique du Globe.	BRELOT.....	T	Calcul différentiel et intégral.
M ^{lle} COUSIN.....	T	Biologie animale (S. P. C. N.).	NORMANT.....	T	Synthèse organique générale.
CHRÉTIEN.....	T	Chimie minérale.	BENARD.....	T	Chimie minérale.
DRACH.....	T	Zoologie.	BUVAT.....	T	Botanique (E. N. S.).
KASTLER.....	T	Physique (E. N. S.).	DUGUÉ.....	T	Statistiques mathématiques.
EPHRUSSI.....	T	Génétique.	SOULAIRAC.....	T	Psychophysiologie.
RIVIÈRE.....	T	Géologie (S. P. C. N.) et sédimentologie.	ULRICH.....	T	Physiologie végétale (E. N. S.).
GAUTHERET.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).	MARÉCHAL.....	T	Optique théorique et appliquée.
LUCAS R.....	T	Recherches physiques.	KIRRMANN.....	T	Théories chimiques.
A. THOMAS.....	T	Biologie cellulaire.	CHADEFAUD.....	T	Botanique.
ARNULF.....	T	Optique appliquée.	M ^{lle} LE BRETON.....	T	Physiologie de la nutrition.
MAX MORAND.....	T	Physique Enseignement.	SALEM.....	T	Mathématiques générales.
SOLEILLET.....	T	Physique (P. C. B.).	LELONG.....	T	Application de l'analyse à la géométrie.
FORTIER.....	T	Mécanique expérimentale des fluides.	DEVILLERS.....	T	Anatomie et Histologie comparées.
DANJON.....	T	Astronomie.	EHRESMANN.....	T	Topologie algébrique.
PETIT.....	T	Biologie maritime.	FRANÇON.....	T	Physique (S. P. C. N.).
QUENEY.....	T	Météorologie et dynamique atmosphérique.	GLANGEAUD.....	T	Géographie physique et Géologie dynamique.
GALLIEN.....	T	Embryologie.	GODEMENT.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
EICHHORN.....	T	Botanique.	PISOT.....	T	Techniques mathématiques de la Physique.
DE CUGNAC.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.).	ROCH (E.).....	T	Géologie.
M ^{lle} CAUCHOIS.....	T	Chimie Physique.	SCHATZMAN.....	T	Astrophysique.
THELLIER.....	T	Physique du Globe.	TERMIER.....	T	Paléontologie stratigraphique.
L'HERITIER.....	T	Biologie générale (Orsay).	ZAMANSKY.....	T	Mathématiques générales.
GRIVET.....	T	Radioélectricité (Orsay).	LENNUIER.....	T	Physique (M. G. P.).
PONCIN.....	T	Mécanique générale.	RIZET.....	T	Génétique (Orsay).
DUBREIL.....	T	Arithmétique et Théorie des nombres.	ROUTHIER.....	T	Géologie appliquée.
QUELET.....	T	Chimie organique.	M ^{me} TONNELAT.....	T	Physique théorique.
CAGNIARD.....	T	Géophysique appliquée.	DIXMIER.....	T	Mathématiques (M. P. C.).
CHAMPETIER.....	T	Chimie macromoléculaire.	SOUCHAY.....	T	Chimie générale.
CUVILLIER.....	T	Micropaléontologie.	AIGRAIN.....	T	Électrotechnique générale.
JUNG.....	T	Pétrographie.	BRUSSET.....	T	Chimie systématique.
TRILLAT.....	T	Microscopie et diffraction électronique.	M. LÉVY.....	T	Physique théorique des hautes Energies (Orsay).
WIEMANN.....	T	Chimie organique et structurale.	M ^{me} CHAIX.....	T	Chimie biologique.
			M ^{me} HUREL-PY.....	T	Biologie végétale (P. C. B.).



PIAUX.....	T	Chimie (M. P. C.).	HAISSINSKY.....	T	Radiochimie.
BRUN.....	T	Mécanique théor. des fluides.	LEMEE.....	T	Physiologie végétale (B.M.P.V.) (Orsay).
LEDERER.....	T	Chimie biologique.	GUERIN.....	T	Chimie (M. P. C.) (Orsay).
M ^{me} DUBREIL.....	T	Mathématiques (Agrég.)	CHATELET M.....		Chimie (P. C. B.).
M ^{me} LELONG.....	T	Mathématiques (E. N. S.).	JEAN.....		Physique nucléaire (Orsay).
BELLAIR.....	T	Géologie (S. P. C. N.).	MATTLER.....	T	Physique (S. P. C. N.).
COTTE.....	T	Physique électricité.	MICHEL (Louis).....		Physique théorique des hautes énergies (Orsay).
DUBOIS J. E.....	T	Chimie organique.	BERGERARD.....		Zoologie (Orsay).
LAMOTTE.....	T	Zoologie (E. N. S.)	BERTEIN.....		Électronique (Orsay).
MICHEL ANDRÉ.....	T	Chimie minérale (Orsay).	BOUSSIÈRES.....		Chimie des Radioéléments (Orsay).
OLMER.....	T	Énergétique générale.	M ^{me} COUTURE.....		Thermodynamique et mécanique Physique.
ROUAULT.....	T	Électricité (Orsay).	ELLENBERGER.....		Géologie appliquée sur le terrain.
GAUTHIER.....	T	Mécanique appliquée.	FRANC.....		Biologie animale (P. C. B.).
BARCHEWITZ.....		Chimie physique.	SCHNELL.....		Botanique tropicale (Orsay).
BROSSEL.....	T	Physique atomique.	STOLKOWSKI.....		Physiologie générale.
BUSER.....		Physiologie comparée.	ACHER.....		Chimie biologique (Orsay).
CAMUS.....		Biologie végétale (B. M. P. V.).	BAUDOIN.....		Biologie animale (P. C. B.).
CASTAING.....	T	Physique (Orsay).	BEAUMONT.....		Biologie animale (S. P. C. N.).
CURIEN.....	T	Minéralogie et Cristallographie.	BLAMONT.....		Géophysique ionosphère.
MOYSE.....	T	Physiologie végétale (Orsay).	BOURREAU.....		Botanique.
NOIROT.....		Évolution des êtres organiques.	CURIE D.....		Physique (M. G. P.).
PANNETIER.....	T	Chimie générale (Orsay).	DURAND-DELGA.....		Géologie.
POSSOMPES.....	T	Zoologie	FREON.....		Chimie organique (Orsay).
PULLMANN.....	T	Chimie théorique.	HELLER.....		Physiologie végétale.
TEILLAC.....	T	Physique nucléaire et Radioactivité.	TORTRAT.....		Calcul des probabilités.
TONNELAT.....		Biologie physicochimique.	CAILLEUX.....		Géologie (S. P. C. N.).
VILLE.....	T	Économétrie.	MAGNAN.....	T	Physique (S. P. C. N.).
WILLEMART.....		Chimie (P. C. B.).	DAUDEL.....	T	Mécanique ondulatoire appliquée à la chimie théorique et à la physique nucléaire.
DODÉ.....	T	Chimie (Orsay).	M ^{lle} FOURCROY.....		Biologie végétale (S. P. C. N.).
FREYMAN.....	T	Recherches physiques.	M ^{me} CHOQUET- BRUHAT.....	T	Mécanique analytique et mécanique céleste.
GUINOCHET.....	T	Biologie végétale (S. P. C. N.) (Orsay).	M ^{lle} VEIL.....		Physiologie générale.
ROLLET.....	T	Chimie (P. C. B.).	LWOFF.....	T	Microbiologie.
M ^{lle} JOSIEN.....	T	Chimie (S. P. C. N.).	SIESTRUNCK.....	T	Mécanique physique et expérimentale.
CHEVALLEY.....	T	Géométrie algébrique et théorie des groupes.	LACOMBE.....	T	Métallurgie des métaux nucléaires (Orsay).
ARNOULT.....	T	Électronique (Orsay).	BROCHARD.....	T	Physique (P. C. B.) (Orsay).
CHAPELLE.....	T	Physique (Orsay).	CABANNES.....	T	Mécanique générale.
DELANGE.....	T	Mathématiques (Orsay).	LESIEUR.....	T	Mathémat. (M. P. C.) (Orsay).
DENY.....	T	Mathémat. générales (Orsay).	MAZET.....	T	Mécanique générale (Orsay).
GERMAIN P.....	T	Mécanique théorique des fluides.	CAIRE.....		Géographie physique et Géologie dynamique.
LUCAS G.....	T	Géologie.	COMOLET.....		Mécanique des fluides.
ALLARD.....	T	Chimie Physique.	CORABOEUF.....		Physiologie animale.
BERTHELOT.....	T	Physique fondamentale des hautes Énergies (Orsay).	DELLOUE.....		Physique de l'exosphère.
BRICARD.....	T	Météorologie et physique de l'atmosphère.	GORENFLOT.....		Botanique II (Orsay).
M ^{me} ALBE-FESSARD		Psychophysiologie.	HOULLON.....		Biologie animale (P. C. B.).
FRIEDEL.....		Physique des solides (Orsay).	JULLIEN J.....		Chimie (P. C. B.).
JULIA M.....		Étude des moléculaires naturelles complexes.	MALGRANGE.....		Techniques mathématiques de la Physique.
LENDER.....		Biologie animale (S. P. C. N.) (Orsay).	OLIVIER.....		Antropologie.
MAGAT.....		Physicochimie des radio-éléments.	NOZERAN.....	T	Botanique II (Orsay).
M ^{lle} QUINTIN.....	T	Électrochimie.	BLANC-LAPIERRE...		Physique (E. N. S.) (Orsay).
MONOD.....	T	Chimie du métabolisme.			
BENOIT.....	T	Physiologie animale (Orsay).			
DE POSSEL.....	T	Analyse numérique.			
CHARLOT.....	T	Chimie analytique.			

Secrétaire Général..... R. POUILLAIN.

M. le Professeur P. GRIVET a bien voulu assurer la direction de cette thèse : je suis heureux de lui exprimer ici ma profonde reconnaissance. Celle-ci va également à M. le Professeur A. BLAQUIERE, qui m'a proposé le sujet de ce travail, et qui en a suivi, étape par étape, le développement.

J'ai le devoir bien agréable de rendre hommage à M. R. WARNECKE, Directeur du Centre de Physique Electronique et Corpusculaire (C.E.P.E.C.) de la C.S.F., et à M. H. LEBOUTET, Chef du Département Grandes Energies, qui m'ont accueilli dans leurs laboratoires et m'ont placé dans des conditions de travail très favorables. J'ai eu le plus grand profit à me trouver à leur école et à bénéficier de leurs conseils. Je tiens à leur témoigner ici ma gratitude.

J'ai reçu de M. le Professeur M. Y. BERNARD, des avis fort utiles ; je l'en remercie très vivement, ainsi que M. B. EPSZTEIN, Ingénieur au C.E.P.E.C. pour de fructueuses discussions.-

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION

I.- COLLISIONS DANS LES PLASMAS COMPLETEMENT IONISES ET EQUATION DE FOKKER-PLANCK

I.1.- Introduction

I.2.- Collisions dans les plasmas complètement ionisés

I.2.1.- Mouvements collectifs, et individuels, dans les plasmas complètement ionisés; Collisions

I.2.2.- Problème des N corps en variables individuelles : hiérarchie YBBKG et équation de Boltzmann rigoureuse.

I.2.3.- Equation de Boltzmann approchée

- 1) Le cas du gaz neutre ordinaire,
- 2) Le cas du plasma (complètement ionisé); approximation du champ self-consistant.

I.3.- L'équation de Fokker-Planck : origines physique et mathématique

I.3.1.- Origine physique : le mouvement brownien

- 1) Le mémoire d'Einstein (1906)
- 2) Le mémoire de Fokker (1914)
- 3) Le mémoire de Planck (1917)
- 4) Application au mouvement brownien général; équation dite de Fokker-Planck
- 5) Hypothèses faites.

I.3.2.- Origine mathématique : les chaînes de Markov.

- 1) Définition et classification des chaînes de Markov
- 2) Les chaînes de Markov continues : chaînes proprement continues, à variations brusques, mixtes.
- 3) Les chaînes proprement continues : conditions de Feller et équations adjointes de Fokker-Planck.

1.2 - Applications de l'équation de Fokker-Planck aux plasmas

1.2.1 - Introduction

1.2.2 - Justification et démonstrations de l'équation de Fokker-Planck appliquée aux plasmas

- 1) Justifications,
- 2) Démonstrations
- 3) Equation F P avec force extérieure.

1.2.3 - Tables des deux coefficients de l'équation F P. Les auteurs de Rosenbluth, Mac Donald, Judd.

1.4.4.- Equations de transport

1.4.5.- Une méthode pratique d'utilisation de l'équation F P

1.5 - Conclusion

Bibliographie 1

2.- ETUDE THEORETIQUE DES COLLISIONS DANS LES PLASMAS A TOUT CHARGE

2.1 - Introduction

2.2 - Les électrons et ions sont séparément à l'équilibre thermodynamique avec $T_e = T_i$

2.2.1.- Coefficient de ralentissement d'une particule

2.2.2.- Coefficient de diffusion

- 1) Coefficient global de diffusion
- 2) Coefficient de diffusion longitudinale
- 3) Coefficient de diffusion transversale

2.2.3.- Fréquences de collision

2.2.4.- Equations de transport

- 2.3.1.- Coefficient de diffusion des ions dans les électrons $V_e \ll V_{Te}$
- 2.3.2.- Equations de transport de la quantité de mouvement
- 2.3.3.- Coefficient de diffusion des électrons dans les ions
- 2.3.4.- Résistivité électrique.

2.4.- Conclusion

Bibliographie 2

1. PREMIERE APPLICATION : REGIME PERMANENT D'UNE SCHEMME MAGNETIQUE. L'ONCHEN ET AL. (1964) - LES TUBES A TRAVERS LES LIGES DE FORCE MAGNETIQUE

3.1.- Introduction

3.2.- Hypothèses - Mise en équations

3.2.1.- Hypothèses

3.2.2.- Mise en équations

3.3.- Dérive des particules dans le champ magnétique

3.3.1.- Expression des vitesses de dérive

3.3.2.- Dérives azimutales des électrons et des ions

3.3.3.- Dérive radiale du plasma

3.4.- Variation radiale de la densité

3.4.1.- Diamagnétisme du plasma

3.4.2.- Variation radiale de la densité

3.4.3.- Limite de validité des hypothèses faites

3.5.- Densité maximale (sur l'axe). Confinement "port"

3.5.1.- Densité maximale (sur l'axe)

3.5.2.- Confinement "port"

3.6.- Cor

3.6.- Courant de fuite. Temps de confinement moyen d'une particule

3.6.1.- Courant de fuite

3.6.2.- Temps de confinement moyen d'une particule

3.7.- Conclusion

Bibliographie 3

4 - DEUXIEME APPLICATION : NEUTRALISATION D'UN FAISCEAU D'IONS PAR INJECTION D'ELECTRONS

4.1.- Introduction

4.2.- Hypothèses - Mise en équations

4.2.1 - Hypothèses

4.2.2.- Mise en équations

4.3.- Petits signaux

4.3.1.- Mouvements collectifs : classification

4.3.2.- Oscillations électroniques

1) $\omega < 1$ (faisceau neutralisé à injecter dans une bouteille magnétique)

2) $\omega > 1$ (propulsion ionique)

4.3.3.- Amortissement dû aux collisions

4.4.- Grands signaux (phénomènes non linéaires)

4.5.- Conclusion

Bibliographie 4

CONCLUSION - RESUME -

COLLISIONS DANS LES PLASMAS A IONS CHAUDS

INTRODUCTION.

Les propriétés très particulières des gaz ou plasmas^(x) fortement ionisés, sont dues aux interactions entre particules chargées. L'étude statistique de ces interactions a conduit à distinguer des interactions lointaines, qui s'exercent entre toutes les particules du plasma, et des interactions proches, ou collisions, qui ne s'exercent qu'entre particules voisines.

Les interactions lointaines sont responsables des mouvements collectifs, mouvements d'ensemble cohérents des particules, qui intéressent de larges régions du plasma (et dans lesquels celui-ci se comporte comme un fluide continu), tandis que les collisions déterminent, à l'échelle microscopique, les mouvements individuels, désordonnés, des particules.

Si la vie du plasma est très brève (comme c'est le cas jusqu'à présent dans les expériences où on s'approche des conditions de la fusion nucléaire contrôlée), les mouvements individuels sont complètement masqués par les mouvements collectifs (instabilités en particulier) et, dans l'analyse théorique, on peut négliger les collisions.

^(x) La définition précise du terme plasma sera donnée au chapitre I, mais, très souvent, on utilise ce mot comme synonyme de gaz ionisé.

Par contre, lorsque la vie du plasma est longue (comme elle l'est dans les plasmas expérimentés en vue de la propulsion ionique, et comme on souhaite qu'elle le soit un jour dans les réacteurs à fusion contrôlée) le rôle des mouvements individuels cesse d'être négligeable et peut même devenir essentiel (ainsi dans la diffusion d'un plasma, confiné dans une bouteille magnétique, à travers les "parois" de la bouteille).

Ce travail comprend deux parties : une première partie théorique consacrée aux collisions (chapitres 1 et 2) et une deuxième partie d'applications à deux problèmes de grande importance pratique, où la vie du plasma est longue, et les collisions par conséquent importantes : a) la fuite radiale des particules d'un plasma thermonucléaire, confiné, en régime permanent - ou pendant une longue durée - dans une bouteille magnétique (chapitre 3).

b) la neutralisation d'un faisceau d'ions par mélange à des électrons, en vue de la propulsion ionique, ou de l'injection d'ions à grande énergie dans une bouteille magnétique (pour y alimenter une réaction de fusion nucléaire) (chapitre 4).

Le problème a) n'a, pour l'instant qu'un intérêt théorique, puisqu'on ne sait pas encore confiner pendant des durées importantes des plasmas thermonucléaires. Son étude permet toutefois de préciser certaines conditions que devra remplir le futur réacteur thermonucléaire, à la réalisation duquel tant d'efforts sont à l'heure actuelle consacrés.

Le problème b), par contre, est dès maintenant l'objet d'études expérimentales, en particulier, en France, au Centre de Physique Electronique et Corpusculaire de la C.S.F. à Corbeville. Les résultats théoriques du chapitre 4 pourront bientôt y être confrontés à l'expérience, et permettront peut-être, sur certains points, de guider celle-ci.

I.- COLLISIONS DANS LES PLASMAS COMPLETEMENT IONISÉS ET ÉQUATION DE FOKKER-PLANCK.

I.I.- INTRODUCTION.

Pour décrire les collisions dans les gaz complètement ionisés, on utilisera, dans les chapitres suivants, l'équation de Fokker-Planck.

Cette équation (dans ses aspects physique et mathématique) et son application aux plasmas, ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux et de publications. On se propose dans ce chapitre de résumer les résultats les plus importants et de les ordonner.

Une première partie est consacrée à des généralités sur les mouvements individuels de la particule dans les gaz complètement ionisés, et sur leur description statistique à l'aide des équations de Langevin et de Fokker-Planck. Plus précisément, ces équations sont d'abord écrites pour une particule en mouvement, l'analogie est ensuite faite avec le mouvement brownien (mouvement d'une particule dans un fluide) et le mouvement d'une particule dans un gaz ionisé. On montre, à ce sujet, l'analogie de ce dernier mouvement d'une particule avec le mouvement brownien, qui a été étudié par Einstein, Fokker et Planck dans l'étude du mouvement brownien. L'équation de Fokker-Planck.

Cette équation fait l'objet d'une deuxième partie où l'on rappelle les principes physiques (mouvement brownien) et les principes mathématiques (équation de Fokker-Planck) qui sont à la base de la description statistique des processus stochastiques. Les résultats obtenus au cours de ce chapitre sont présentés sous la forme d'exemples.

La question de l'application de l'équation de Fokker-Planck aux plasmas complètement ionisés sera abordée dans une troisième et dernière partie. Pour terminer, on indiquera une méthode pratique d'utilisation de l'équation de Fokker-Planck, qui sera employée dans les chapitres suivants.

1.1

1.2.- COLLISIONS DANS LES PLASMAS COMPLETTEMENT IONISÉS

1.2.1.- Mouvements collectifs, et individuels, dans les plasmas complètement ionisés ; collisions.

Dans un gaz complètement ionisé - formé d'électrons et d'ions - les interactions entre particules sont essentiellement des interactions de Coulomb⁽¹⁾. Les interactions de Van der Waals entre molécules d'un gaz neutre sont dues à des interactions de Van der Waals entre molécules d'un gaz neutre. Les interactions de Van der Waals entre molécules d'un gaz neutre sont dues à des interactions de Van der Waals entre molécules d'un gaz neutre. (attractive ou répulsive) $F = e^2/4\pi\epsilon_0 r^2$.

Mais, par ailleurs, si on envisage le champ électrique (coulombien) créé par une particule donnée, on peut montrer que la portée de celui-ci est limitée, en moyenne, par l'effet d'écran des particules voisines, à une certaine distance λ_D , la longueur de Debye, caractérisée pour la première fois par Debye et Hückel pour l'étude des électrolytes, sous un gaz complètement ionisé (formé, dans le cas le plus général, d'électrons - charge - e - densité n_e - et de plusieurs espèces d'ions - charges - Ze - densité n_i - où $n_e = \sum_i Z_i n_i$ - à l'équilibre thermodynamique ($n_e = \sum_i Z_i n_i$ - densité - température). on a :

$$\frac{1}{\lambda_D^2} = \left[\frac{e^2 n_e}{kT} \right] = \left[\frac{e^2}{kT} \left(n_e + \sum_i Z_i^2 n_i \right) \right]$$

(1) Les interactions électromagnétiques transcoulombiennes sont négligées, car les plasma sont relativistes, donc les interactions électromagnétiques - les interactions -

En outre, ces deux particularités séparées par une distance $L > L_0$ ne "voient" pas du tout l'une ou l'autre et, inversement, se voient à partir d'un point de vue indépendant.

Ces deux aspects complémentaires et la validité même des paragraphes n'ont pas complètement résolu, on sentait à première vue, les contradictions. Les ont elles conduites à la suite d'un certain nombre de travaux sur les corrélations dans les gaz ionisés, et en particulier d'un séminaire de 1960 et Pines [1].

Ces deux auteurs ont traité les fluctuations de la densité électronique $n_j(\vec{r}, t) = \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i)$ ($\vec{r}_i$ position du j^e électron) et ont ainsi écrit une forme d'oscillations et d'onde [2]. Ils montrent que la quantification du champ, d'oscillation, de $n_j(\vec{r}, t) = n_j(\vec{r}) + \delta[n_j(\vec{r})] = \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} n_j(\vec{k}) d\vec{k} = \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \sum_i \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d\vec{k} = \sum_i \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \delta(\vec{r} - \vec{r}_i) d\vec{k}$. Or, dans le cas, selon

$$n_j(\vec{r}) = -[ne^2/\epsilon_0 n_0] n_0(\vec{r}) - \sum_i (\vec{r}_i \cdot \vec{r}_j) \int e^{-i\vec{k} \cdot \vec{r}} \vec{r}_j$$

$$\frac{e^2}{\epsilon_0 n_0} \int \frac{1}{k^2} n_0(\vec{k}) n_0(\vec{k} - \vec{k}) \frac{d\vec{k}}{k^2} \quad (1)$$

on a $n_j(\vec{r}) = n_0(\vec{r})$ désigne la densité électronique moyenne (dans le temps).

[1] Ils supposent que les ions ont une densité uniforme, et sont fixes, dans ce cas seulement, par leur présence, la neutralité globale du gaz.

La première partie du second membre est composée de termes relatifs aux fluctuations à la pulsation $\omega_p = [ne^2/\epsilon_0 m_e]^{1/2}$ (pulsation plasma).^(*)

La seconde partie du second membre est composée de termes relatifs à la contribution aux fluctuations de densité, des mouvements individuels d'agitation thermique (ce terme subsisterait même s'il n'y avait aucune interaction entre particules).

Quant au troisième terme, c'est un terme de couplage entre les fluctuations de la densité correspondant à différentes valeurs d'onde (interactions de $n_k(\vec{k})$). On peut montrer [1] que ce terme est nul dans les cas suivants : (1) si les deux ondes interagissant sont des ondes de plasma (il faut alors se soucier des arguments relatifs aux $\vec{k}$ et $\vec{k}'$), (2) si l'une des ondes est une onde de plasma et l'autre une onde de densité (il faut alors se soucier des arguments relatifs aux $\vec{k}$ et $\vec{k}'$), (3) si les deux ondes sont des ondes de densité (il faut alors se soucier des arguments relatifs aux $\vec{k}$ et $\vec{k}'$). La signification de ce terme.

Il est intéressant de remarquer l'importance des deux premiers termes qui sont prépondérants.

En remplaçant $n_k(\vec{k})$ par $\frac{1}{\sqrt{V}} \sum_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_j}$ dans le premier terme, on voit qu'il faut comparer $(\vec{k} \cdot \vec{r}_j)^2$ et $ne^2/\epsilon_0 m_e$. Pour un gaz à l'équilibre thermodynamique, les vitesses des électrons sont distribuées selon une loi de Gauss et $\langle v^2 \rangle = \frac{3}{2} k_B T = \frac{3}{2} \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{V} \sum_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_j}$ ($\epsilon = \frac{3}{2} \frac{e^2}{m_e} \frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{V} \sum_j e^{i\vec{k}\cdot\vec{r}_j}$: densité-type).

Les mouvements individuels sont donc de nature thermique. Leur contribution aux fluctuations de densité dépend du mouvement collectif.

^(*) On peut se demander si l'expression $\omega_p = [ne^2/\epsilon_0 m_e]^{1/2}$ est valable pour un gaz à l'équilibre thermodynamique. On peut montrer que c'est le cas. En effet, on peut écrire la relation de dispersion du plasma en utilisant la relation de dispersion d'un gaz à l'équilibre thermodynamique.

$$\langle \tilde{n}_0 \tilde{n}_0 \rangle = \frac{kT}{m_e} = \frac{\gamma kT}{e m_e}$$

soit

$$k^2 \ll \frac{n_e^2}{\epsilon_0 kT} = \frac{1}{e l_D^2} \quad \text{ou} \quad \frac{1}{k} \gg l_D$$

On voit en comparant les longueurs caractéristiques qui interviennent dans ces relations que $1/k \gg l_D$.

Par conséquent, à une échelle inférieure à la longueur de Debye, les fluctuations de densité sont régies par les mouvements individuels des particules : à une échelle supérieure, par les mouvements collectifs. Pour le cas des hypothèses de Bohm et Pines, ceux-ci sont des oscillations sinusoidales à la pulsation ω_p . Mais, bien entendu, ils peuvent être plus complexes).

Corrélativement, si on fait l'analyse de Fourier dans le temps, on trouve un spectre $n_{\omega}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} [n_{\omega_p}(t)]$ qui a l'allure suivante (fig. 1),

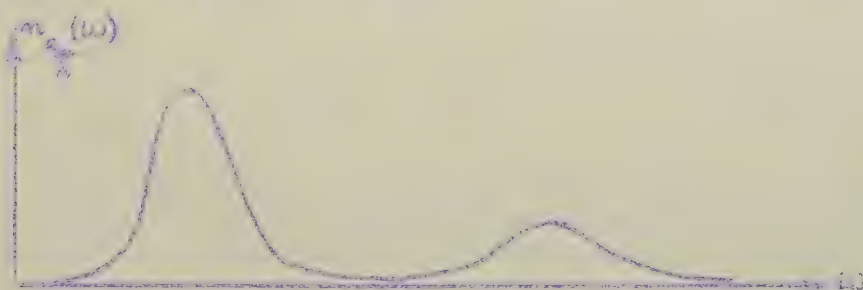


Figure 1.- Spectre de Fourier (dans le temps) de la densité électronique en un point P .

où ω_p est la pulsation plasma classique et $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{3}} \left(\frac{kT_e}{m_e} \right)^{1/2}$ la pulsation moyenne des fluctuations individuelles (thermiques) de densité.

En résumé, un électron donné subit de la part des électrons "lointains" (situés à une distance supérieure à $\frac{1}{k_D}$) une force moyenne nulle (x) $\bar{F} = 0$ et de la part des électrons "voisins" (situés à une distance inférieure à $\frac{1}{k_D}$) une force très rapidement fluctuante $\vec{F}$. L'introduction des mouvements ioniques (toujours dans le cadre de la $\bar{R} \ll R$) ne modifie pas qualitativement cette conclusion (voir (11)). Il y a simplement lieu d'introduire, à côté des collisions électroniques ou de ω_{pe} (désignées ci-dessus par ω_p et ω_{pe}), les pulsations ioniques ω_{pi} et ω_{pi} .

Autrement dit, on peut distinguer, parmi les interactions entre une particule (ici donnée) et les autres particules du plasma, des interactions lointaines (entre la particule-test et toutes les particules du plasma enfermées à la sphère de Debye de $\bar{R}$), signifiant $\bar{R}$, et des interactions proches (entre la particule-test et les particules de la sphère de Debye), signifiant $\bar{R}$, auxquelles on réserve le nom de collisions(+).

Les mouvements collectifs sont dus aux interactions lointaines (le rôle des collisions étant négligeable), tandis que les mouvements individuels dépendent à la fois des interactions lointaines et des collisions. C'est ainsi qu'il faut lire l'équation (1) de Bohm et Pines.

(x) Lentement, en comparaison de $\frac{1}{\omega_{pe}}$

(+) Dans un gaz neutre la notion de collision est claire : les interactions entre particules sont à très courte portée, et discontinues dans le temps (chocs du type "boules de billard") ; la définition des collisions dans un gaz complètement ionisé (où les interactions sont à très longue portée et par conséquent continues dans le temps) est beaucoup plus arbitraire. L'usage établi est d'appeler collisions les interactions proches (entre particules voisines, appartenant à une même sphère de Debye), par opposition aux interactions lointaines. Les collisions, dans un gaz complètement ionisé (non dégénéré) sont essentiellement des interactions binaires (les collisions qui ont un paramètre d'impact $b \ll \frac{1}{k_D}$ doivent a priori être considérées comme multiples mais on verra plus loin - § 1.4.3. - qu'on peut les traiter comme binaires au même titre que les collisions à $b \ll \frac{1}{k_D}$). Les interactions lointaines sont multiples.

les mouvements collectifs sont solutions de l'équation $\ddot{n}_c(\vec{k}) = -\left[\frac{m_e^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{v_{th}^2}{v_{te}^2} \frac{1}{k^2} - i \frac{v_{th}^2}{v_{te}^2} \frac{1}{k^2} \frac{d}{dt}\right] n_c(\vec{k})$ pour les longueurs d'onde $\lambda = 1/k \gg l_D$ (interactions lointaines)

les mouvements individuels sont solutions de l'équation complète

$$\ddot{n}(\vec{k}) = -\left[\frac{m_e^2}{m} + \frac{1}{2} \frac{v_{th}^2}{v_{te}^2} \frac{1}{k^2} - i \frac{v_{th}^2}{v_{te}^2} \frac{1}{k^2} \frac{d}{dt}\right] n(\vec{k}) - \frac{1}{2} \frac{v_{th}^2}{v_{te}^2} \frac{1}{k^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{k^2} \frac{d}{dt} n(\vec{k}) \right] + \frac{1}{2} \frac{v_{th}^2}{v_{te}^2} \frac{1}{k^2} \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{k^2} \frac{d}{dt} n(\vec{k}) \right]$$

où $\lambda = 1/k$ peut être inférieur à l_D (interactions proches) ou supérieur (interactions lointaines)

- ① décrit l'effet des interactions lointaines
- ② décrit l'effet de l'agitation thermique
- ③ décrit l'effet des collisions.

La méthode des variables collectives, développée par Bales et (dans [1]) par d'autres, (avec le δV et quelques autres), à partir des équations de Vlasov, fournit un excellent outil d'étude des mouvements collectifs dans les plasmas classiques (plasmas pas très denses et très chauds tels que ceux qu'on utilise dans la recherche sur la fusion nucléaire contrôlée ou sur la propulsion électrique). Ce sont les plasmas dont on s'occupe dans ce travail. Et surtout dans les plasmas quantiques (plasmas froids et très denses de la physique du solide).

Elle n'est pas adaptée à l'étude, que nous avons en vue, des oscillations pour décrire celles-ci, et, par conséquent, les mouvements individuels. Il faut utiliser des variables individuelles, position $\vec{r}$ et vitesse $\vec{v}$, ou, plus simplement, individuelles.

Après avoir très brièvement rappelé le traitement statistique rigoureux, en variables individuelles, du problème des δV (comme "DBV" et équation de Boltzmann rigoureuse), on verra comment, dans le cas des plasmas,

l'analyse précédente (qui conduit à distinguer des interactions lointaines et des interactions proches, une force lentement variable $\bar{F}$ et une force rapidement variable $\tilde{F}$) permet d'introduire une approximation, grâce à laquelle on peut passer de la chaîne des équations EBKG, rigoureuses, mais en général inexploitable (par trop compliquées), à des équations pratiquement utilisables.

1.2.2.- Problème des N corps en variables individuelles : chaîne EBKG ;

Solution de Boltzmann rigoureuse

Envisageons un gaz formé de N particules identiques $\bar{m}$ de masse m , interagissant selon une loi donnée, par exemple selon une loi de force centrale, dérivant d'un potentiel $V(r)$. Connaissant les positions $\vec{r}_i(0)$ et les vitesses $\vec{v}_i(0) = \dot{\vec{r}}_i(0)$ de ces particules à l'instant 0, leur positions et leurs vitesses à l'instant t sont déterminées par la solution du système des N équations couplées (*)

potentiel des forces extérieures).

Remarque : (1) On ne connaît en général pas les 2 N conditions initiales $\vec{r}_i(0), \vec{v}_i(0)$: on ne possède à leur sujet que des renseignements statistiques, par exemple leur distribution de probabilité $P(\vec{r}, \vec{v})$ au

$\vec{r}_i(0) = \vec{r}_j(0)$ et $\vec{v}_i(0) = \vec{v}_j(0)$ pour $i \neq j$ (ce qui est en fait une approximation).

(2) On ne peut pas résoudre le système des N équations (*)

car il faut connaître les positions et les vitesses de toutes les particules à l'instant 0.

La description la plus simple de l'état d'un système de N particules est donnée par la fonction de distribution $P(\vec{r}, \vec{v})$ qui donne la probabilité de trouver une particule à l'instant t dans un élément de volume $d\vec{r} d\vec{v}$ autour de la position $\vec{r}$ et de la vitesse $\vec{v}$.

(3) En supposant que les particules interagissent par une force de type central, on peut écrire les équations de la chaîne EBKG sous la forme

mouvement: composantes des $\vec{p}_i = m \vec{v}_i$. L'état du gaz à l'instant t serait parfaitement défini si on connaissait Π ; son évolution dans le temps si on connaissait la courbe $\Pi(t)$. Statistiquement, cet état sera défini par la densité de probabilité $D(\Pi, t)$ du point Π dans Φ . Cette densité obéit au théorème de Liouville :

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial D}{\partial \vec{q}_i} \frac{d\vec{q}_i}{dt} + \frac{\partial D}{\partial \vec{p}_i} \frac{d\vec{p}_i}{dt} \right] = 0$$

On introduit l'hamiltonien $H(\vec{q}, \vec{p}) = \sum_i \left(\frac{1}{2} m \vec{v}_i^2 + U(\vec{q}) \right)$ et on écrit les équations d'Hamilton :

$$\frac{d\vec{q}_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} \quad \frac{d\vec{p}_i}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i}$$

$$\frac{dD}{dt} = \frac{\partial D}{\partial t} + \sum_i \left[\frac{\partial D}{\partial \vec{q}_i} \frac{\partial H}{\partial \vec{p}_i} - \frac{\partial D}{\partial \vec{p}_i} \frac{\partial H}{\partial \vec{q}_i} \right] \equiv \frac{dD}{dt} + [D, H] = 0 \quad (12)$$

1.2.1. Les intégrales du mouvement

Les valeurs des solutions (12) sont constantes en (13) qu'une telle équation (12) admette, on peut trouver une fonction invariante I mais cette fonction est à l'ordre 1 des variables dynamiques et en général, on ne trouve pas plus de 10 intégrales du mouvement (14).

A côté de l'espace des phases à $6N$ dimensions $\bar{\Phi}$, précédant, dont le point courant π représente l'état dynamique de toutes les particules du gaz, on introduit de nouvelles coordonnées $(\vec{r}, \vec{w})$ dans lesquelles, dont le point courant π (coordonnées x, y, z ; composantes de $\vec{v}$ et w_x, w_y, w_z ; composantes de $\vec{w}$) ; représente l'état dynamique, à l'instant t , d'une seule particule i (position $\vec{r}$; vitesse $\vec{w}$). Statistiquement, le mouvement de π sera défini par la fonction $\rho(\pi, t)$, densité de probabilité de π dans $\bar{\Phi}$. A l'instant t : $\int_{\bar{\Phi}} \rho(\pi, t) d\pi = 1$; la probabilité pour que, à l'instant t , la particule i soit située à l'intérieur de $(\vec{r}, d\vec{r})$; l'élément de volume $dv = dx dy dz$; et ait une vitesse appartenant à $(\vec{w}, d\vec{w})$; élément de volume $d\vec{w} = dw_x dw_y dw_z$ de l'espace des vitesses, limité sur $d\vec{w}$ ($w_x < w_x + dw_x$, etc.).

En multipliant ρ par N - nombre total des particules, on obtient la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{w}, t) = N \rho(\vec{r}, \vec{w}, t) dv d\vec{w}$ représentant (pour N très grand) le nombre de particules qui, à l'instant t , sont situées à l'intérieur de $(\vec{r}, d\vec{r})$, et ont une vitesse appartenant à $(\vec{w}, d\vec{w})$.

Si on coupe l'espace $\bar{\Phi}$ en sous-espaces $\bar{\Phi}_i$ en intégrant l'équation de Liouville sur $N-1$ tels sous-espaces, on obtient une équation portant sur ρ_i ou sur f_i :

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{w}} = - \int \frac{\vec{F}(\vec{r}, \vec{r}')}{m} \cdot \frac{\partial f_i}{\partial \vec{w}} d\vec{r}' d\vec{w}' \quad (4)$$

où $\vec{F}(\vec{r} = \vec{r}_i, t)$ désigne la force attractive exercée sur i ; $\vec{F}_{ij} (= -\vec{F}_i = \vec{F}_j)$ la force exercée sur i par une autre particule j ; $\vec{r}'$ est gen. de position $\vec{r}'$; et de vitesse $\vec{w}'$.

Soient $\tilde{f}(\tilde{p}, \tilde{q}, t)$ l'équation (4), dite équation de Boltzmann, contient la fonction $f_{nm}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{p}', \tilde{q}', t)$ fonction de distribution à 3 particules : $f_{nm}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{p}', \tilde{q}', t)$ représente le nombre de couples de particules $(\tilde{p}, \tilde{q})$ dont l'une $(\tilde{p})$ est dans $(\tilde{p}, \tilde{q})$, l'autre $(\tilde{p}')$, dans $(\tilde{p}', \tilde{q}')$, leurs vitesses appartenant respectivement à $(\tilde{p}, \tilde{q})$ et $(\tilde{p}', \tilde{q}')$. On ne peut donc résoudre (4) que si l'on connaît f_{nm} .

Cette dernière fonction est solution de l'équation obtenue en intégrant l'équation de Liouville sur $N-2$ sous-espaces ϕ :

$$\frac{\partial f_{nm}}{\partial t} + \sum_i \frac{\partial f_{nm}}{\partial \tilde{p}_i} \tilde{p}_i + \sum_i \frac{\partial f_{nm}}{\partial \tilde{q}_i} \tilde{q}_i = \frac{\partial f_{nm}}{\partial \tilde{p}'} + \frac{\partial f_{nm}}{\partial \tilde{q}'} - \frac{\partial f_{nm}}{\partial \tilde{p}} - \frac{\partial f_{nm}}{\partial \tilde{q}} \quad (c)$$

qui contient la fonction de distribution à 3 particules $f_{nm}(\tilde{p}, \tilde{q}, \tilde{p}', \tilde{q}', t)$.

On voit qu'il faut ainsi de proche en proche, résoudre les N équations obtenues en intégrant l'équation de Liouville sur $(N-2)$ sous-espaces ϕ de $\tilde{\Gamma}$, équations qui constituent ce qu'on appelle le chaîne (ou hiérarchie) BBGK (Yvon [5], Bogoliubov [4], Bales [5], Straton [5]).

Green [7]). Le problème ainsi posé n'est évidemment pas plus simple que celui de la résolution de l'équation de Liouville (3)(*) .

(*) De façon très rapidement, nous avons généralisé les considérations précédentes au cas où le gaz n'est plus formé d'un seul type de particules mais de plusieurs, par exemple deux : des particules P et des particules Q .

L'équation de Liouville garde sa forme, mais il y a maintenant deux fonctions de distribution ρ (à une particule) ρ_P et ρ_Q , et fonctions de distribution à 2 particules : ρ_{PP} , ρ_{PQ} , ρ_{QQ} , etc ...

Les deux équations de Boltzmann relatives à ρ_P et ρ_Q s'écrivent :

$$\frac{\partial \rho_P}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \rho_P}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_P}{m_P} \cdot \frac{\partial \rho_P}{\partial \vec{v}} = - \left(\frac{\vec{F}_P}{m_P} \cdot \frac{\partial \rho_P}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \rho_Q}{\partial \vec{v}_Q} + \frac{\partial \rho_P}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \rho_Q}{\partial \vec{v}_Q} \right) \quad (3)$$

$$\frac{\partial \rho_Q}{\partial t} + \vec{v} \cdot \frac{\partial \rho_Q}{\partial \vec{r}} + \frac{\vec{F}_Q}{m_Q} \cdot \frac{\partial \rho_Q}{\partial \vec{v}} = - \left(\frac{\vec{F}_Q}{m_Q} \cdot \frac{\partial \rho_Q}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \rho_P}{\partial \vec{v}_P} + \frac{\partial \rho_Q}{\partial \vec{v}} \cdot \frac{\partial \rho_P}{\partial \vec{v}_P} \right) \quad (4)$$

La généralisation des équations à 3, 4, 5 particules, n'offre aucune difficulté.

Aussi est-on amené à "rompre" la chaîne des équations VBSKG, c'est-à-dire à résoudre (à une manière qui sera nécessairement approchée) les premières quelques équations à 1 ($\langle v_p \rangle = 0$, $\langle v_{pp} \rangle = \dots$ partielles), en ignorant le reste de la chaîne(x).

L'approximation la plus simple consiste à ne garder que la première équation, c'est-à-dire une équation de Boltzmann approchée.

1.2.3.- Équation de Boltzmann approchée

Avant d'aborder le cas, plus difficile, du plasma, il peut être intéressant de dire quelques mots du gaz du gaz neutre pour lequel fut établie la première équation de Boltzmann approchée.

1) Le cas du gaz neutre ordinaire

Dans un gaz ordinaire, formé de molécules neutres, les interactions sont à très faible portée, la force attractive est la force de premier ordre, en sorte que la trajectoire d'une particule est une ligne brisée, dont les segments (rectilignes) correspondent au mouvement d'une particule libre dans le champ de pesanteur et les points anguleux, à des chocs discrets.

L'évolution dans le temps de la vitesse sur un axe, par exemple, se représente sur la figure 1. Pour un tel processus (poissonien) de chocs discrets, qui rappellent les chocs entre boules de billard, on peut admettre que :

(x) Il est important de noter que, de fait, on se prive de toute description des corrélations multiples d'ordre élevé, qui jouent peut-être un rôle essentiel dans les phénomènes collectifs, tels que les instabilités.

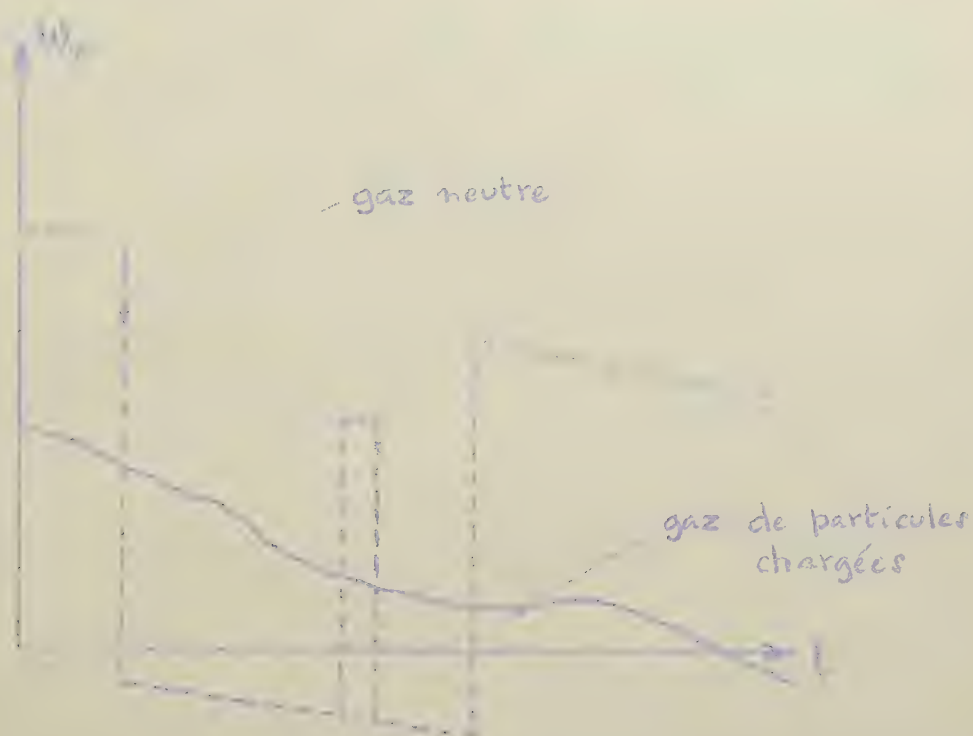


Figure 1

les deux sont purement classiques: $\frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi} \neq 0$, $\frac{\partial}{\partial t} \bar{\psi} = \bar{\psi} \frac{\partial}{\partial t} = 0$
 seulement, entre les deux, on a "une particule": $\bar{\psi} \psi = 1$
 (c'est-à-dire que les deux ne sont pas corrélés)
 pendant la durée Δt pendant laquelle on a une particule
 on a une variation $\Delta \bar{\psi}$ importante de $\bar{\psi}$, mais une variation de
 ψ est $\Delta \psi = 0$

Avec ces hypothèses, on a :

$$\frac{\partial^2 f_{xy}}{\partial t^2} = \frac{f_{xy}(t+\delta t) - f_{xy}(t)}{\delta t^2} = \frac{f_y(t+\delta t)f_x(t+\delta t) - f_y(t)f_x(t)}{\delta t^2}$$

(f_y et f_x étant les fonctions de distribution juste avant le choc, f_y et f_x juste après)

$$\frac{\partial f_{xy}}{\partial t} = \frac{\partial f_y}{\partial t} f_x + f_y \frac{\partial f_x}{\partial t}$$

On reprend l'équation de continuité (qui traduit l'équilibre des masses) sous sa forme précédente pour l'écrire $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0$ sous la forme précédente :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial x} = 0$$

Les constantes d'intégration sont les coordonnées du point P' et de vitesse ($\vec{v}'$) de P' . Pour l'intégration, P' reste donc fixe et on peut utiliser des coordonnées cylindriques (ρ, φ, z) l'axe z étant défini par la vitesse relative avant le choc $\vec{v} = \vec{v}_1(t) - \vec{v}_2(t)$; $d\vec{v}' = \rho d\varphi dz$, et $dz/dt = L$.

$$\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll} = - \int [\underline{f}_p \underline{f}_{p'} - \underline{f}_p \underline{f}_{p'}] v \rho d\varphi dz d\vec{v}'$$

Pour un gaz de molécules neutres, on a donc l'équation de Boltzmann simplifiée :

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \vec{v} \cdot \nabla f = \int \underline{f}_p \underline{f}_{p'} - \underline{f}_p \underline{f}_{p'} v \rho d\varphi dz d\vec{v}'$$

1) $\vec{v} \cdot \nabla f$ ayant l'expression ci-dessus ($\vec{v}$: force extérieure, $\vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}_2$)

2) le cas du plasma (complètement ionisé) : approximation de Boltzmann simplifiée

Dans un gaz neutre, la composante v_z (sur z axe z) de la vitesse $\vec{v}$ d'une molécule varie en escalier (Fig. 1, courbe en tireté), par suite de chocs rares et discrets, entre lesquels la molécule se soude que la force extérieure $\vec{F} = -\nabla \phi$.

Dans les plasmas complètement ionisés qui sont homogènes, la loi de variation de v_z donnée par :

$$F = F_0 + F_1 \cos \omega t$$

où F_0 est la force lentement variable due aux interactions lointaines (et éventuellement aux forces extérieures appliquées^(*)), et F_1 la force rapidement fluctuante due aux collisions (cf. 1.2.1), à l'aire de la courbe en fait prise de la forme $F_1 \cos \omega t$ (cf. 1.2.1). On suppose donc F_1 d'une courbe régulière. ($\log F_1 / \log k \approx \frac{1}{2}$)

Dans l'analogie avec le gaz neutre, F_1 correspond ainsi à $\frac{1}{2} \frac{d \log F_1}{d \log k}$ et $\left(\frac{d \log F_1}{d \log k} \right)_{k=0}$, taux de variation de F_1 dû à F_1 , c'est-à-dire aux collisions (au sens interactions proches) à $\left(\frac{d \log F_1}{d \log k} \right)_{k=0}$. On est donc conduit à l'expression de la courbe F_1 en fonction de k et ω approchée :

$$F_1 = F_0 \left(1 + \frac{1}{2} \frac{d \log F_1}{d \log k} \right)$$

L'analogie avec le gaz neutre est évidente si on considère que la courbe F_1 est la courbe F_1 en fonction de k et ω .

On suppose que la courbe F_1 est la courbe F_1 en fonction de k et ω . On suppose que la courbe F_1 est la courbe F_1 en fonction de k et ω . On suppose que la courbe F_1 est la courbe F_1 en fonction de k et ω .

(*) Cette hypothèse pourrait être relaxée si on considère la partie des courbes F_1 en fonction de k et ω . On suppose que la courbe F_1 est la courbe F_1 en fonction de k et ω . On suppose que la courbe F_1 est la courbe F_1 en fonction de k et ω .

On voit qu'on aura $(a_{p_1}, a_{p_2}) < (a_{q_1}, a_{q_2})$ si $d < l_p$.
 Or le sens de l'inégalité forte entre d et l_p , marque la frontière entre
 les plasmas quantiques ($d \sim l_p$) dans les états condensés, ou les plasmas
 classiques ($d \ll l_p$).

Dans les plasmas classiques, à hautes températures et relativement
 faibles densités, (auxquels on se limite dans ce travail) l'approximation du
 champ self-consistent est correcte, et par conséquent, la forme (6) l'équa-
 tion de Boltzmann approchée.

Il reste, pour expliciter celle-ci, à préciser $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$

La méthode usuelle pour calculer $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ est de considérer (1) à l'é-
 chelle atomique, en supposant que les ions sont fixes, et que les électrons
 sont en mouvement, et de calculer $\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)_{coll}$ en utilisant la théorie de Boltzmann.

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (6.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial \vec{r}} \cdot \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \frac{\partial f}{\partial \vec{v}} = 0 \quad (6.2)$$

Le champ négatif self-consistent $\vec{E} = -\nabla \phi$ (6.3) est obtenu de :

On a vu que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite AB . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite CD . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite EF . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite GH . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite IJK .

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Donc

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$$

Donc on a :

On a vu que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite AB . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite CD . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite EF . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite GH . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite IJK .

On a vu que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite AB . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite CD . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite EF . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite GH . On a vu aussi que les points P_1, P_2, P_3 sont sur la droite IJK .

on voit que la variation dans le temps de W_x (composante de la vitesse selon un axe $Ox=1$ a, elle aussi, l'allure de la courbe en trait plein de la figure 1.

L'étude du mouvement brownien - plus ancienne que celle des gaz complètement ionisés - a conduit Einstein, Fokker et Planck, à une expression de $(\partial f / \partial t)_{coll}$ (et par conséquent à une équation de Boltzmann approchée, appelée maintenant équation de Fokker-Planck) qu'on va examiner maintenant (1.3). On verra ensuite (1.4) comment l'équation de Fokker-Planck peut être transposée aux plasmas, et comment les méthodes systématiques modernes de rupture de la chaîne FRED, permettent de retrouver cette équation en y précisant la valeur et le champ d'application.

1.3. - L'ÉQUATION DE FOKKER-PLANCK. ORIGINES PHYSIQUES ET MATHÉMATIQUES

Historiquement l'équation de Fokker-Planck a été retrouvée d'abord, sous une forme très simple, par Einstein, dans l'étude du mouvement brownien. Fokker et Planck l'ont généralisée et en ont étendu le champ d'application à tout mouvement d'un système soumis à des perturbations aléatoires entièrement continues et positives.

Plus tard, les mathématiciens ont retrouvé cette équation dans l'étude des processus stochastiques dits de Markov.

Nous allons examiner successivement ces deux points de vue, ce qui nous permettra, d'une part de comprendre la signification concrète de l'équation de Fokker-Planck, d'autre part, d'en préciser les bases rigoureuses, mathématiques.

1.3.1. - Origine physique : le mouvement brownien

1) Le mémoire d'Einstein de 1906

C'est sans doute dans un mémoire d'Einstein de 1906 [9], sur la théorie du mouvement brownien qu'il fait connaître l'équation de Fokker-Planck. Revenant sur le mémoire qu'il avait publié l'année précédente [8], où il utilisait le mouvement des molécules suspendues dans un fluide pour la "théorie statistique de la chaleur" - Einstein envisage des molécules plongées dans un fluide homogène, l'ensemble étant en équilibre thermodynamique.

Soit q un paramètre caractéristique de la molécule (proportionnel au volume des composants de la molécule par exemple, voir [1]). Si l'on considère une molécule isolée, quel que soit q , les forces sur ses molécules ont pour résultante résultant d'un potentiel $V(q)$. En l'absence d'agitation thermique, les molécules auraient toutes le même q , $q = q_0$: le q qui minimise $V(q)$. En suite de l'agitation thermique des particules du fluide, les q des molécules isolées sont distribués à un instant donné, autour de q_0 . Dans son mémoire de 1906, Einstein avait montré que le centre de gravité, pour la distribution $\rho(q)$ est compris entre q_0 et $q_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dq^2} \frac{1}{kT}$ est

$$\bar{q} = q_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dq^2} \frac{1}{kT} \quad \text{ou} \quad \bar{q} = q_0 + \frac{1}{2} \frac{d^2 V}{dq^2} \frac{1}{kT}$$

où k est une constante, kT la constante de Boltzmann. La densité dans le fluide $\rho(q)$ est la fonction de distribution.

Il se pose maintenant la question suivante :

A l'instant t une molécule particulière possède un certain q .

Par suite de l'agitation thermique des molécules du fluide qui l'entoure, le

pour les ... de la ...

CHAPITRE ...

Il est ... de la ...

Pour la ... de la ...

Il est ... de la ...

CHAPITRE ...

Il est ... de la ...

$$\langle \Delta q^2 \rangle = 2k_B T \Delta t$$

ou

$$(\langle \Delta q^2 \rangle)^{1/2} = (2k_B T)^{1/2} (\Delta t)^{1/2} \quad (9) \quad (\text{écart-type})$$

Après avoir fait quelques applications, Einstein s'interroge sur les limites de validité de la formule (8). La vitesse quadratique moyenne à laquelle varie q par suite des chocs désordonnés dus à l'agitation thermique est :

$$\frac{(\langle \Delta q^2 \rangle)^{1/2}}{\Delta t} = \frac{(2k_B T)^{1/2}}{(\Delta t)^{1/2}}$$

elle augmenterait indéfiniment quand $\Delta t \rightarrow 0$, ce qui n'est évidemment pas vrai. Ce sont les hypothèses faites au cours du calcul conduisant à (8) qui faut discuter. Il a été supposé que la variation Δq de q , due à l'agitation thermique, entre t et $t + \Delta t$ (Δt petit) ne dépend que de q et non de l'histoire antérieure de la particule. Ceci cesse d'être vrai pour des Δt suffisamment petits. Autrement dit, la formule (9) (et l'équation (8)) n'est valable que si le processus d'évolution de q (du à l'agitation thermique) peut être considéré comme une chaîne de Markov(x).

En 1905, les chaînes de Markov n'avaient pas encore été étudiées systématiquement, mais Einstein avait clairement vu la liaison essentielle qui existe entre ce type de processus stochastique et l'équation (8), premier stade de ce qui allait devenir l'équation de Fokker - Planck.

(x) Un verre plus loin (2) Origine (accidentelle) la définition précise d'une chaîne de Markov. Intuitivement un processus stochastique est une chaîne de Markov si l'avenir ne dépend que du présent, non du passé.

Notons que si q est la vitesse $\dot{\alpha}$ (sur l'axe défini par la force extérieure Z) et l'équation (8) s'écrit :

$$\frac{F}{m} \frac{d\langle \alpha \rangle}{dt} = \frac{1}{m} \langle \Delta \alpha^2 \rangle \frac{d}{dq} (q)$$

2) Le mémoire de Volker [10] (1957) s'intéresse à l'énergie moyenne de dipôles statistiques tournant sur eux-mêmes dans un champ de rayonnement (11). Il fait le rapprochement entre, d'une part, le mouvement de rotation d'un dipôle, soumis à une force extérieure lentement variable (le champ électromagnétique) et à une force très rapidement fluctuante (due aux interactions avec les autres dipôles, en agitation thermique), et, d'autre part, le mouvement brownien d'une micelle, soumise à l'action de la force extérieure de pesanteur et aux chocs désordonnés des molécules du fluide.

A la suite de la micelle, correspond, comme paramètre q , le moment cinétique du dipôle. Mais ici, on ne peut plus supposer l'équilibre infinitésimal vis à vis de q : $\langle \Delta q^2 \rangle$ ne sera donc plus, en principe, nul; par ailleurs $\langle \Delta q^2 \rangle$ et $\langle \Delta q \rangle$ dépendront de q . L'équation (8) d'Einstein n'est donc plus valable.

Fokker propose, sans démonstration, l'équation :

(11) Ce problème s'insère dans les recherches de Einstein, Smoloukhov, Fokker, sur la théorie de la chaleur spécifique de rotation de l'hydrogène aux basses températures.

états de régime permanent : la fonction de distribution $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ des particules $\mathbf{r} = (x, y, z)$, $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ est le nombre de particules pour lesquelles $\mathbf{r} < \mathbf{r} + d\mathbf{r}$, $\mathbf{v} < \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, $\mathbf{v} < \mathbf{v} + d\mathbf{v}$, $\mathbf{v} < \mathbf{v} + d\mathbf{v}$ peut désormais dépendre du temps.

Planck établit (cf. appendice 2) l'équation :

(la convention de sommation sur les indices muets est faite : $\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} = \nabla \cdot$)

$$\Delta \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \Delta \mathbf{q}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \dots ; \text{ les coordonnées initiales sont constantes}$$

soit, en notations vectorielles :

soit $\Delta \mathbf{q} \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \Delta \mathbf{q}_2 \cdot \frac{\partial \mathbf{q}}{\partial t} + \dots$ avec $\mathbf{q} = (q_1, q_2, \dots, q_n)$
 la fonction $\mathbf{q}$ est une variable.

La fonction de répartition $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ est une fonction de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$. Elle est définie par la relation $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = N d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ où N est le nombre de particules dans l'élément de volume $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$. La fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ est une fonction de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$. Elle est définie par la relation $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = N d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ où N est le nombre de particules dans l'élément de volume $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$. La fonction $f(\mathbf{r}, \mathbf{v})$ est une fonction de $\mathbf{r}$ et $\mathbf{v}$. Elle est définie par la relation $f(\mathbf{r}, \mathbf{v}) d\mathbf{r} d\mathbf{v} = N d\mathbf{r} d\mathbf{v}$ où N est le nombre de particules dans l'élément de volume $d\mathbf{r} d\mathbf{v}$.

L'état d'un système est caractérisé par les coordonnées $\mathbf{q}$ et les impulsions $\mathbf{p}$ et son évolution est gouvernée par les équations de Hamilton. Les équations de Hamilton sont des équations différentielles du second ordre.

En présence d'une force extérieure, l'équation de Planck s'écrit donc finalement :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{z}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{w}} = - \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left[\vec{w} \rho \left(\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial \vec{w}}{\partial \vec{z}} + \frac{\vec{F}}{m} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \vec{w}} \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{w}}{2} \right) \rho \right]$$

On simplifie généralement l'écriture en posant $\Delta t = 1$ seconde :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{w} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{z}} + \frac{\vec{F}}{m} \cdot \frac{\partial \rho}{\partial \vec{w}} = - \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left[\langle \vec{w} \dot{\vec{w}} \rangle \rho \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \vec{w}} \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{w}}{2} \right) \rho \right] \quad (16)$$

Il ne s'agit que d'une convention, il ne s'agit pas de la dérivée moyenne de $\vec{w}$ par rapport aux secondes, mais dérivée par rapport au temps unitaire. On a donc $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \Delta t} \Delta t$ pour $\Delta t = 1$ seconde (sans unité) et ainsi, on a $\frac{\partial \vec{w}}{\partial t} = \frac{\partial \vec{w}}{\partial \Delta t}$.

L'équation (16) est du type de Boltzmann (cf. [1, 2, 3]) avec deux termes de collision :

$$\left(\frac{\partial \rho}{\partial t} \right)_{\text{coll}} = - \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left[\langle \vec{w} \dot{\vec{w}} \rangle \rho \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{w}} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \vec{w}} \left(\frac{\vec{w} \cdot \vec{w}}{2} \right) \rho \right]$$

(17) est appelé terme de collision de Fokker-Planck, et (16), équation de Fokker-Planck généralisée sous cette forme, par des méthodes d'intégration de ces deux termes de collision, par la méthode [1], [2] et [3] ou par la méthode [4].

5° Hypothèses faites : Indépendamment des hypothèses, l'origine physique q'implique l'équation de Langevin du mouvement brownien (13). Les hypothèses faites, implicitement ou explicitement par Einstein et Planck pour aboutir aux équations (8) et (11) sont les suivantes :

Le mouvement brownien peut être considéré comme un processus de Markov : le mouvement à venir d'une micelle est déterminé par son état dynamique présent, non par son histoire antérieure. Einstein souligne qu'il fait cette hypothèse, Planck n'en parle pas, mais lorsqu'il écrit sous la forme $\frac{dQ}{dt}$ la probabilité pour que la particule se trouve à Q entre les instants t et $t + \Delta t$, il suppose que cette probabilité ne dépend que de Q , valeur du paramètre à l'instant t , et non des valeurs antérieures de Q : il suppose donc qu'il a affaire à un processus de Markov.

Les moments d'ordres supérieurs à 2 de ΔQ (ou Δx) tels que $\langle \Delta Q^3 \rangle$ sont négligeables : cette hypothèse est d'ailleurs compatible avec ce que l'on a vu que $\langle \Delta w^2 \rangle$ est du même ordre que $\langle \Delta w \rangle$.

1.3 - Origine mathématique : les chaînes de Markov

On vient de voir qu'Einstein et Planck, pour aboutir à l'équation (11) de l'énergie, Planck suppose que le mouvement brownien est ce qu'on appelle maintenant un processus de Markov : l'avenir d'une micelle est déterminé (en probabilité) par son présent et non par son passé (ou sa venue) comme par la définition précise d'une chaîne de Markov).

L'étude mathématique de nos processus stochastiques est présentée aux travaux d'Einstein, de Fokker et de Planck. Elle a permis d'obtenir l'équation de Fokker-Planck sur des bases rigoureuses, on va en résumer brièvement les principaux résultats.

1) Définition et classification des chaînes de Markov : Soit

un système qui évolue aléatoirement dans le temps, $\Omega(t)$ l'état de ce système à l'instant t , Ω l'ensemble des états possibles de l'ensemble.

de E et Ω un sous-ensemble quelconque de

On dit que l'évolution de S est une chaîne de Markov (X) si, quel que soient l'entier $n \geq 0$, les instants $t_0, t_1, \dots, t_n$ et les états $E_0, E_1, \dots, E_n \in E$ et le sous-ensemble Ω de Ω , la probabilité conditionnelle $P(E_{n+1} = E_{n+1} | E_n = E_n, \dots, E_0 = E_0, t_0 = t_0, \dots, t_n = t_n, \Omega)$ pour que E_{n+1} appartienne à Ω , sachant que $(E_0, E_1, \dots, E_n, t_0, \dots, t_n) \in \Omega$, ne dépend que de E_n et t_n et non de $E_0, \dots, E_{n-1}, t_0, \dots, t_{n-1}$. Autrement dit, la probabilité de passage P précédente est de la forme $P(E_n, t_n; E_{n+1})$.

Si les changements d'état aléatoires de S ne peuvent avoir lieu qu'à des instants déterminés d'avance $t_0, t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, la chaîne est dite discontinue.

Si, au contraire, n'importe quel instant t peut a priori être une date possible pour un changement d'état de S , on dit que la chaîne est continue.

2) Les chaînes de Markov continues : chaînes proprement continues.

Pour simplifier que l'état E de S peut être caractérisé par une grandeur scalaire X , X est une fonction aléatoire du temps (La valeur $X(t)$ de X à l'instant t est une variable aléatoire : un état particulier E de S à l'instant t est caractérisé par une certaine valeur $X(t) = E$).

On suppose en outre que l'ensemble Ω des états possibles est l'ensemble S des états.

(1) On suppose que les chaînes de Markov continues sont proprement continues, c'est-à-dire que les probabilités de passage P sont continues.

(2) On suppose que les chaînes de Markov continues sont proprement continues.

Une telle chaîne est dite proprement continue, si $X(t)$ est continue en probabilité(x).

Si, au contraire $X(t)$ ne varie que par sauts brusques, se produisant à des instants aléatoires (non connus à l'avance), la chaîne est dite à variations brusques.

Enfin, dans les chaînes mixtes $X(t) = X_1(t) + X_2(t)$ où $X_1(t)$ est proprement continue et $X_2(t)$ à variations brusques.

2) Les chaînes proprement continues - conditions de Feller

équations adjointes de Fekker - Planck

Soit une chaîne de Markov proprement continue, à laquelle correspond la famille stochastique $X(t)$ continue en probabilité; on se suppose que la fonction de répartition conditionnelle $F(t, x; \tau, \xi)$ de $X(t)$ (avec $X(\tau) = \xi$) possédant une densité de probabilité continue et dérivable ad libitum.

L'axiome des probabilités composées entraîne :

$$\frac{\partial}{\partial t} F(t, x; \tau, \xi) = - \frac{\partial}{\partial x} [A(t, x) F(t, x; \tau, \xi)] + \frac{\partial^2}{\partial x^2} [B(t, x) F(t, x; \tau, \xi)]$$

(équation de Fekker - Planck)

(x) On dit qu'une fonction stochastique $X(t)$ est continue en probabilité, si, quel que soit le nombre $\epsilon > 0$ on peut trouver $\delta > 0$ tel que $|x_1 - x_2| < \delta$ implique $P(|X(t) - X(s)| < \epsilon) > 1 - \epsilon$

$$P(|X(t) - X(s)| < \epsilon) = \int_{|x_1 - x_2| < \delta} F(t, x_1; s, x_2) dx_1 dx_2 > 1 - \epsilon$$

(xx) $F(t, x, \tau, \xi) = F(s, x, \tau, \xi)$ lorsque $X(t) = x$

(xxx) $F(t, x, \tau, \xi) = F(t, x, \tau, \xi)$ lorsque $X(t) = x$

L'hypothèse de la continuité propre de la chaîne entraîne par ailleurs

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} P(t, x; t + \Delta t, y) dy = 1$$

Pour pouvoir développer l'étude de ces chaînes proprement continues, Kolmogorov [45], Khasin [46], Petrovskij [47] et Feller [48] ont été conduits à faire des hypothèses plus précises.

La théorie la plus complète est due à Feller. Celui-ci suppose que :

(1)

$$P(t, x; t + \Delta t, y) = O(\Delta t)$$

$$\int_{\mathbb{R}^n} P(t, x; t + \Delta t, y) dy = a(t, x) \Delta t + o(\Delta t)$$

(2)

Les convergences étant uniformes,

$$P_a / \partial t, P_a / \partial x, P_{aa} / \partial x^2, P_{ax} / \partial x$$

existent et sont

ainsi que a et b , localement lipschitziennes en t et en x (2a)

(1a) Ce qui implique que P est continue par rapport à t et x , plus, en moyenne quadratique.

(2a) Une fonction numérique $f(t, x)$ d'ordre deux en t et x est dite localement lipschitzienne en t et x si tout point de $\mathbb{R}^n$ est en voisinage dans lequel on peut trouver deux séries bornées t_n et x_n que l'on ait identiquement :

$$|f(t_n, x_n) - f(t, x)| \leq C(|t_n - t| + |x_n - x|)$$

$$\Phi(t, x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-i\xi(x-y)) \Phi(t, y, \xi) dy$$

also

$$\Phi(t, x, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\sqrt{a(t, \xi)}} \frac{1}{\sqrt{a(t, \xi)}} \frac{1}{\sqrt{a(t, \xi)}} \dots$$

$$\frac{[\varphi(t, \xi) - \varphi(t, x)]^2}{2} = \dots$$

$$\varphi(t, x) = \int_0^x \frac{d\xi}{\sqrt{a(t, \xi)}}$$

also

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, x, \xi) \exp(i\xi(x-y)) d\xi = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(t, y, \xi) \exp(i\xi(x-y)) d\xi$$

also

$$\lambda(t, x) = \Phi(t, x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, x) + \sqrt{a(t, x)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$$

where the last term is the derivative of $\Phi(t, x)$ with respect to t .

where $\lambda(t, x) = \Phi(t, x) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x} \Phi(t, x) + \sqrt{a(t, x)} \frac{\partial \Phi}{\partial t}$

on retrouve la solution fondamentale bien connue :

$$f(t, x; \tau, \xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \sqrt{\tau-t}} e^{-\frac{(\xi-x)^2}{2(\tau-t)}}$$

est centrée en x ou en ξ (de moyenne ξ ou x , et de variance $\tau-t$).

Les valeurs de ξ et x sont supposées positives, satisfaisant aux conditions de validité, qui sont satisfaites, effectuée par la transformation des deux fonctions

$\alpha(t, x)$ et $\beta(t, x)$. Dans la théorie du mouvement brownien les deux fonctions donnent $\langle \Delta x \rangle$ et $\langle \Delta x^2 \rangle$ et les probabilités $\langle \Delta x \rangle$ et $\langle \Delta x^2 \rangle$ et les fonctions génératrices $\Phi(t)$ dans la théorie de la diffusion.

I.4 - APPLICATION DE L'EQUATION DE FOKKER-PLANCK AUX PLASMAS COMPLETEMENT IONISES

I.4.I. - Introduction

Forgée pour décrire le mouvement brownien, puis généralisée au processus de Markov (continu), l'équation de Fokker-Planck (F.P.) revient, on vient de le voir, sur un certain nombre d'hypothèses, qu'on peut évaluer de manière physique (cf. 5) ou mathématique (cf. 3 et 3.1.3.3).

Ces hypothèses sont-elles valables dans le cas d'un plasma complètement ionisé, et l'équation F.P. est-elle applicable à un tel milieu ? Dépassant la simple justification, les études récentes sur ce point aboutissent à une démonstration directe de l'équation F.P. dans le cas des plasmas, qui en précise la signification et la portée.

Il reste, pour pouvoir appliquer l'équation F.P. aux plasmas complètement ionisés, à calculer les deux coefficients $\langle \dot{u}^2 \rangle$ et $\langle \dot{u} \dot{u}^2 \rangle$ dont dépend cette équation. On exposera la méthode générale et celle due à Rosenbluth, Mac Donald et Judd (R.M.J.).

De cette méthode présente, sur d'autres, l'avantage de pouvoir être utilisée, - moyennant une légère modification qu'on indiquera - dans le cas de plasmas où les températures électronique et ionique sont différentes (tels que ceux qui seront étudiés dans les chapitres suivants).

Malgré de ces deux coefficients, calculés par la méthode R.M.J., l'équation F.P. devrait permettre d'atteindre la fonction de distribution des vitesses $f(\vec{v}, \vec{r}, t)$, pour chaque type de particule (électrons ou ions). Or, le plus souvent, ce n'est pas cette fonction de distribution que l'on cherche, mais des grandeurs macroscopiques, telles que densité, vitesse moyenne, etc... Il est possible, moyennant certaines approximations, d'atteindre directement ces grandeurs, par emploi d'équations dérivées de l'équation F.P., les équations de transport. On rappellera pour terminer cette méthode, qui sera utilisée systématiquement.

quement dans les chapitres précédents.

1.4.2 - Justifications et démonstrations de l'équation de Fokker-Planck appliquée aux plasmas.

L'équation F.P. est-elle applicable aux plasmas ? Les premières réponses apportées à cette question l'ont été sous forme de justifications des hypothèses qui sont à la base de l'équation F.P. telle qu'on l'a étudiée au paragraphe précédent.

1) Justifications

Rappelons dans leur formulation physique, plus concrète, relative au mouvement brownien, les différentes hypothèses sur lesquelles repose l'équation de Fokker-Planck :

. le mouvement d'une micelle est markovien,

il est possible de trouver un intervalle de temps Δt , pendant lequel la micelle subit un très grand nombre de chocs, et tel que les variations correspondantes de la position $\Delta \vec{r} = \vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)$, et de la vitesse $\Delta \vec{v} = \vec{v}(t + \Delta t) - \vec{v}(t)$, de la micelle, vérifient :

$$\langle \Delta \vec{r} \rangle = \vec{v} \Delta t$$

les moments d'ordre > 1 de $\Delta \vec{r}$ étant négligeables

$$\langle \Delta \vec{r}^2 \rangle = D \Delta t \quad \langle \Delta \vec{r}^3 \rangle = O(\Delta t^2)$$

$$\langle \Delta \vec{v} \rangle = 0 \quad \text{et} \quad \langle \Delta \vec{v}^2 \rangle = \Delta t$$

sont de l'ordre de Δt

les moments d'ordre > 2 de $\Delta \vec{v}$ étant négligeables ($\langle \Delta \vec{v}^3 \rangle = O(\Delta t^2)$)

Une justification expérimentale directe a pu être faite dans le cas du mouvement brownien, les micelles étant directement observables.

Le mouvement d'une particule chargée appartenant à un plasma présente, on l'a vu, beaucoup d'analogies avec le mouvement brownien d'une molécule. Dans l'un et l'autre cas, les chocs sont très nombreux, chacun d'eux n'entraînant qu'une très légère modification de la vitesse $\vec{w}(x)$.

Ceci conduit à appliquer aux plasmas l'équation de Fokker-Planck, étant ici un intervalle de temps vérifiant $(\omega_p, \omega_{pe}) \ll \Delta t \ll (\omega_p, \omega_{pe})$ (cf. I 2.7) mais, pour eux, la justification expérimentale directe dont on vient de parler est évidemment exclue. Les seules justifications possibles sont :

- une justification expérimentale indirecte, basée sur la confrontation à l'expérience, des conséquences de l'équation F P,
- une justification théorique, à partir des équations rigoureuses YBKG.

La justification expérimentale indirecte est très délicate : la durée de vie des plasmas complètement ionisés qu'on sait réaliser au laboratoire est souvent très brève : les mouvements individuels sont alors masqués par des mouvements collectifs, instabilités en particulier. Cependant, les coefficients de transport (conductivité électrique et thermique, coefficient de diffusion dans un champ magnétique, etc...) déduits de l'équation de Fokker-Planck, ont permis d'interpréter quantitativement un certain nombre de résultats expérimentaux, relatifs à des plasmas ni trop chauds, ni trop denses.

Les justifications théoriques utilisent (comme les démonstrations proprement dites, qu'on examinera plus loin), les équations YBKG. La plus importante est sans doute celle de Gasiorowicz, Neuman et Riddell [19].

Procédant à une analyse physique des phénomènes, ces auteurs calculent les différents moments de $\vec{w}$, dans un milieu ionisé en supposant que :

(x) Dans un plasma, le choc de deux particules chargées, peut entraîner une déflexion, et donc un Δw très important (quand $b < b_c$; b : paramètre d'impact, b_c : paramètre d'impact critique, cf. I 4.3) Mais ces chocs très rapprochés, sont exceptionnels et on peut les négliger en première approximation. Pour en tenir compte, il faudrait remplacer l'équation de Fokker-Planck par l'équation de Veller [18] relative aux chaînes de Markov mixtes (cf. I 3.2.). Nous avons tenté cette généralisation; elle conduit à des équations très lourdes, difficilement utilisables en pratique.

• le mouvement d'une particule est markovien,

• on a "chaos particulaire" $\rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3, \vec{r}_4; t) = \rho(\vec{r}_1, \vec{r}_2; t) \rho(\vec{r}_3, \vec{r}_4; t)$

• le plasma est au voisinage de l'équilibre thermodynamique, $\rho = \rho^{(0)} + \rho^{(1)}$

et la fonction de distribution de Maxwell, et

Ils obtiennent les résultats suivants :

Les deux premiers moments $\langle \vec{A} \rangle$ et $\langle \vec{A} \otimes \vec{A} \rangle$ (qui sont les deux coefficients de l'équation $\nabla \cdot \vec{P}$) sont de l'ordre de Δt . Les moments d'ordre supérieur sont de l'ordre de $\Delta t (d/R_D)^2$ (pour le moment 3), $\Delta t (d/R_D)^4$

(pour le moment d'ordre 4), etc... où d est la distance moyenne entre les particules. Pour un plasma non dégénéré $d \approx \lambda_D$: les moments d'ordre supérieur à 2 sont donc de la forme $\Delta t \lambda_D^2$, et négligeables devant les moments d'ordre 1 et 2. C'est une des hypothèses qui est à la base de l'équation (1) et qui est donc justifiée. Elle ne l'est toutefois qu'en pris les approximations.

2) Démonstrations

Le point de départ de celles-ci est la théorie de Bogolyubov [10]. Celui-ci remarque que les équations de la chaîne Vlasov ne tiennent pas compte d'une donnée physique fondamentale : le nombre N des particules dans un volume V est évidemment fixé. Il faut donc, III-11, leur donner une forme asymptotique pour $N \rightarrow \infty$. Pour cela, Bogolyubov utilise un développement des fonctions de distribution à 1, 2, ..., N particules par rapport au "paramètre de continuité" $1/N$.

Dans le cas des gaz neutres V est une valeur constante arbitraire. On peut alors résoudre les équations d'Ursell - Heyan.

Dans le cas des gaz de particules chargées, Bogoljubov montre qu'il aboutit se réduisent en première approximation, et pour les faibles densités aux résultats de la théorie de Debye et Hückel.

$$n_2 = \frac{1}{4\pi} \frac{e^2}{kT} n_1^2 \quad (distribution maxwellienne)$$

$$f_{PQ} = f_P f_Q \left[1 - \varepsilon \frac{Z_1 Z_2}{\lambda / l_D} \exp - r / l_D \right] \quad (x) \quad (Z : \text{nombre de charge} = \frac{1}{e} \text{ charge} ; \varepsilon = 1 / m l_D^3)$$

Couplée à l'hypothèse dite de la "hiérarchie des temps de relaxation" (x'), la méthode de développement par rapport à un paramètre de couplage conduit aux équations cinétiques d'une partie très générale (x'').

La première démonstration de l'équation (x) dans le cas de plasmas (x') par la méthode de Bogoljubov est due à Taniuchi [24] qui calcule en outre les deux coefficients pour une particule-test traversant un plasma à l'équilibre thermodynamique.

(x) Pour les fortes densités, λ devient très grand et ε devient négatif, ce qui est absurde.

(x') Suivant cette hypothèse qui a été formulée par Hohenberg [21], Green [22] et Van Leeve [23], les fonctions de distributions multiples $f^{(n)}$ "relaxent" c'est-à-dire prennent des valeurs d'équilibre $f^{(n)}_{eq}$ en des temps beaucoup plus courts que le temps de relaxation de la fonction de distribution à une particule $f^{(1)}$ peut être considéré comme constant pendant $t_{rel}^{(1)}$.

(x'') Ces équations ont été développées dans le cas des plasmas par Landau [25] et Balescu [25].

(+) Il faut toutefois signaler que Landau (en 1936), avait déjà établi une équation cinétique des plasmas équivalente à l'équation (x) (x'). Pour éviter la divergence des intégrales dues à la très longue portée des forces de Coulomb, Landau introduit arbitrairement une coupure à la distance de Debye. La méthode de Bogoljubov, elle, introduit naturellement cette coupure.

D'autres démonstrations sont ensuite données par Toland [28] et Kadomtsev [29] (qui rétablit, par la méthode de Bogoljubov, l'expression de $(\partial f / \partial t)_{coll}$, du 2ème membre de l'équation F-P, due à Landau [25]).

Tous ces auteurs utilisent le paramètre de couplage de Bogoljubov $\mu = \omega_p^2 / \omega^2$ à l'ordre 0, ils obtiennent l'équation de Vlasov, à l'ordre 1 l'équation de Fokker-Planck (Ceci apparaît encore plus nettement dans un article plus récent de Rostoker et Rosenbluth [30]).

Il en résulte que l'effet des collisions décrites par l'équation F-P, se manifeste sur une échelle des temps τ_{coll} plus grande que celle qui correspond aux mouvements collectifs décrits par l'équation de Vlasov. Pour des particules en densité $n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$ à la température $T = 1500^\circ \text{K}$ pour $\omega = 10^8 \text{ rad/s}$ (électrons dans une machine à miroirs, cf. chap. 3), $1/\varepsilon = 300$, pour $n = 10^{14} \text{ m}^{-3}$, $T = 1500^\circ \text{K}$ (électrons dans un faisceau neutralisé, cf. chap. 4) $1/\varepsilon = 1800$.

L'effet des collisions n'est donc important que sur de longues durées, si la vie du plasma est très brève, seuls comptent les mouvements collectifs.

Klimontovic [31] montre qu'il faut introduire au 2ème membre de l'équation F-P, des termes de ralentissement et de diffusion dus à l'excitation par la particule test d'oscillations longitudinales de plasma et écrire l'équation F-P sous la forme $\partial f / \partial t = (\partial f / \partial t)_{coll} + (\partial f / \partial t)_{osc} + (\partial f / \partial t)_{diff}$ $f = f(\vec{r}, \vec{v}, t)$

$$(x) \quad \left(\frac{\partial f}{\partial t} \right)_{coll} = \frac{e^2 h_a n}{8 \pi \varepsilon_0 m_a} \frac{1}{b} \frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \int \frac{\vec{v} \cdot \vec{v}'}{u^3} \left(\frac{1}{m_a} \frac{\partial f_a(\vec{v}')}{\partial \vec{v}} f_b(\vec{v}) + \frac{1}{m_b} \frac{\partial f_b(\vec{v}')}{\partial \vec{v}} f_a(\vec{v}) \right) d\vec{v}'$$

où $(a, b) = (e, i)$, $\vec{u} = \vec{v} - \vec{v}'$

avec

$$\left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right)_{\text{acc}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{a}} [\langle \vec{A} \vec{a} \rangle] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{a}} \otimes \frac{\partial}{\partial \vec{a}} [\langle \vec{a} \vec{a} \otimes \vec{a} \vec{a} \rangle] \quad (34)$$

Klimontovitch a établi par ailleurs [32], que l'introduction du rayonnement électromagnétique (dans tout ce qui précède, il n'a été tenu compte que des interactions coulombiennes entre particules) se traduit par l'apparition d'un terme supplémentaire dans $\left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right)_{\text{acc}}$ (à ajouter aux termes $\left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right)_{\text{acc}}$ et

$$\left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right)_{\text{acc}}, \left(\frac{\partial \vec{b}}{\partial t}\right)_{\text{acc}} = -\frac{\partial}{\partial \vec{a}} [\langle \vec{a} \vec{a} \rangle] + \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \vec{a}} \otimes \frac{\partial}{\partial \vec{a}} [\langle \vec{a} \vec{a} \otimes \vec{a} \vec{a} \rangle] \quad (\text{ce problème a été repris depuis par Simon [33]})$$

(x) Klimontovitch a calculé les deux coefficients $\langle \vec{A} \vec{a} \rangle_{\text{acc}}$ et $\langle \vec{a} \vec{a} \otimes \vec{a} \vec{a} \rangle_{\text{acc}}$ pour une particule-test de vitesse $\vec{u}$, il trouve :

$$\langle \vec{A} \vec{a} \rangle_{\text{acc}} = \frac{2}{a} \langle \vec{A} \vec{a} \rangle_{\text{acc}}, \quad \langle \vec{A} \vec{a} \rangle_{\text{acc}} = \frac{n_a e^4}{4\pi \epsilon_0 m_a u^2} \ln \frac{u}{(k T_a / m_a)^{1/2}}$$

$$\langle \vec{A} \vec{a} \otimes \vec{A} \vec{a} \rangle_{\text{acc}} = \frac{2}{a} \langle \vec{A} \vec{a} \otimes \vec{A} \vec{a} \rangle_{\text{acc}}, \quad \langle \vec{A} \vec{a} \otimes \vec{A} \vec{a} \rangle_{\text{acc}}$$

ayant pour composantes, sur $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ ($\vec{e}_i = \vec{u}/u$)

$$\left(\langle \vec{A} \vec{a} \otimes \vec{A} \vec{a} \rangle_{\text{acc}} \right)_{ij} = \frac{n_a e^4}{4\pi \epsilon_0 m_a u^2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{u^2} \frac{k T_a}{m_a} \end{pmatrix}$$

Des généralisations relativiste et quantique de l'équation F P ont également été développées (not. en particulier Klimontovic et Silin [34] et Silin [35]). Elles sortent du cadre de ce travail consacré aux seuls plasmas classiques.

Signalons enfin les efforts tentés (en particulier par Tchen [36]) pour tenir compte dans l'équation cinétique d'un plasma de termes non-markoviens (x).

3) Equation F P avec force extérieure

L'équation de Fokker-Planck du mouvement brownien (16), § I.3.1) contient un terme de force extérieure. On a vu (§ I.2.3.) que, dans le cas d'un plasma complètement ionisé, le terme analogue était le champ self-consistant, dont les sources sont d'une part les sources extérieures de champ (x') (pratiquement champ électromagnétique), d'autre part, les particules du plasma lui-même (compte tenu de l'action du champ extérieur sur ces dernières). Ceci est confirmé par les démonstrations ci-dessus.

Mais le champ extérieur n'agit pas seulement par l'intermédiaire du terme $(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \nabla / \partial \vec{v}$ du premier membre de l'équation F P. Il modifie en outre l'expression de $(\partial f / \partial t)_{\text{ext}}$. Les expressions de $(\partial f / \partial t)_{\text{ext}}$ de Landau, Tsenko, Klimontovic, cessent d'être valables.

(x) Le mouvement d'une particule appartenant à un plasma n'est sûrement pas markovien en toute rigueur. Une particule chargée polarise en effet le milieu ambiant. Cette polarisation a la symétrie de révolution autour de la vitesse de la particule. Lorsque celle-ci subit une déflexion, elle traverse, pendant un bref laps de temps, un milieu qui est encore, partiellement, polarisé avec l'ancienne symétrie (autour de l'ancienne vitesse $\vec{v}$). Son mouvement dépend donc, dans une certaine mesure, de son histoire antérieure. L'hypothèse du mouvement markovien ne peut donc être qu'une approximation.

(x') à condition toutefois que la fréquence f de celui-ci soit petite devant ω_p et ω_c .

Beljaev [37] (par la méthode des "variables lentes" de Budker et Beljaev [38]), puis Rostoker et Rosenbluth [39] (par la méthode de Bogoljubov) ont établi des expressions de $(\partial f / \partial t)_{coll}$ pour un plasma soumis à un champ magnétique extérieur constant ^(x). Une théorie plus fine tenant compte du rayonnement cyclotron a été développée depuis par Rostoker et Simon [40].

Mesron [41] a étudié le cas d'un plasma soumis à un champ électrique extérieur constant E , très intense. Utilisant la méthode de Bogoljubov avec, comme paramètre de continuité $\lambda = \pi / \omega$ ($\lambda = \pi / \omega$, distance moyenne entre particules), il montre que, dans la hiérarchie YBFG, les équations d'ordre élevé deviennent sans importance pour des champs E intenses. À l'ordre 0 on obtient l'équation de Vlasov, à l'ordre 1, l'équation de Fokker-Planck.

1.4.3.- Calcul des deux coefficients de l'équation F F. la méthode de Rosenbluth, Mac Donald, Judd

Les deux coefficients $\langle \Delta v^2 \rangle$ (ralentissement) et $\langle \Delta v \rangle$ (diffusion) dont dépend le terme de collision $(\partial f / \partial t)_{coll}$ de l'équation F F ont été calculés par Chandrasekhar [42] pour un plasma à l'équilibre thermodynamique. Traitant les collisions en interactions binaires, Chandrasekhar leur applique la formule de section efficace de Rutherford; il évite la divergence des intégrales (dus à la très longue portée des forces de Coulomb) en introduisant, arbitrairement, une coupure à la longueur de Debye.

Temko [43] retrouve ces coefficients, toujours pour un plasma à l'équilibre thermodynamique, par une méthode beaucoup plus satisfaisante (dérivée de celle de Bogoljubov, cf. ci-dessus). La coupure à la longueur de Debye s'introduisant naturellement.

Le calcul des coefficients pour des distributions quelconques de vitesses a été fait par Rosenbluth, Mac Donald et Judd [44] par la méthode de

(x) On reviendra sur ce point au chapitre 3.

Charukhakh (collisions traitées en chocs coulombiens binaires; coupure à $\frac{1}{2}$). C'est cette méthode qu'on va exposer maintenant avec plus de détail. Les plasmas qu'on étudiera dans la suite de ce travail seront en effet hors d'équilibre thermodynamique.

Rappelons d'abord la signification de α (coefficient de ralentissement) et de D (coefficient de diffusion :

Soit P une particule (électron ou ion) située à l'instant t , au point $\vec{r}$. Sous l'action des champs de Coulomb des particules voisines, appartenant à sa sphère de Debye (sphère centrée sur P , de rayon λ_D), la vitesse $\vec{v}$ de P , varie "en une seconde" (cf. I.3.I: 4) de $\Delta \vec{v}$.

Le premier coefficient de l'équation de Fokker-Planck, α , est la moyenne de $\Delta \vec{v}$ sur l'ensemble des particules P (électrons ou ions) situées à l'instant t au point $\vec{r}$ (dans l'élément volume centré sur $\vec{r}$) et $\vec{v}$ possédant la vitesse $\vec{v}$ (une vitesse appartenant à l'élément de volume de l'espace des vitesses centré sur $\vec{v}$).

Le second coefficient est le moment d'ordre 2 $\Delta \vec{v} \Delta \vec{v}$.

Rosenbluth, Mac Donald et Judd ont calculé ces deux coefficients pour des fonctions de distribution $f(\vec{r}, \vec{v})$ quelconques (x) .

(x) Avec toutefois l'hypothèse restrictive $T_e = T_i = T$ (on reviendra plus loin sur ce point).

Une collision binaire entre la particule-ion P , d'espèce a (vitesse $\vec{v}_a$) et une autre particule Q , d'espèce b (vitesse $\vec{v}_b$) est caractérisée par un certain paramètre d'impact b (K. Rosenbluth et al.

(x) Dans le référentiel barycentrique, les trajectoires de deux particules libres P et Q entrant en collision, sont deux courbes homothétiques par rapport au centre de gravité G (des hyperboles pour une loi de force en $1/r^2$). Chacune de ces courbes possède deux asymptotes (trajectoires longtemps avant et longtemps après la collision). Le paramètre d'impact b est la distance entre P et Q (ou P' et Q').

L'angle de déflexion χ (dans le référentiel barycentrique; dans le référentiel du laboratoire, l'angle de déflexion χ' , est χ'/χ pour une collision ion-ion ou électron-électron; χ' pour une collision électron-ion) est donné, en fonction de la vitesse relative v des deux particules, de leurs masses m_a et m_b , et du paramètre d'impact b (pour des ions de charge $+e$), par :

$$\tan \frac{\chi}{2} = \frac{b}{r} \quad \text{avec} \quad r = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 k^2} (m_a + m_b)$$

(b_c est appelé paramètre d'impact critique; pour $b > b_c$, $\chi = 0$)

où $\chi_{\min}$ est l'angle de déflexion minimal (dans le référentiel barycentrique), lors d'une collision P-Q. Cette déflexion minimale se produit pour la plus grande valeur possible du paramètre d'impact, $b = b_0 : \chi_{\min} = \chi(b_0)$.
De $\tan \frac{\chi}{2} = b_0 / v$ (cf. note précédente), on déduit :

$$\frac{1}{N} \approx \frac{1}{2} \chi(b_0) \approx \frac{1}{2} \chi(b) \approx \frac{1}{2} \chi \quad \text{D'où } \frac{1}{N} \approx \frac{1}{2} \chi$$

$$\chi = \frac{1}{N} \quad \text{D'où } \frac{1}{N} = \frac{1}{2} \chi \approx \frac{1}{2} \chi(b) \approx \frac{1}{2} \chi$$

On a vu, dans la note précédente, que pour un plasma à l'équilibre, on a :
densité électronique $n_e = n_i$ (1)

$$\frac{1}{N} \approx \left(\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 kT} \right)^{1/2} = \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0 kT} \right)^{1/2} \quad (x)$$

Si électrons et ions ne sont pas à la même température, il faut distinguer une longueur de Debye électronique λ_{De} , et une longueur

(x) On supposera toujours, désormais, que les ions sont simplement chargés (c'est-à-dire $q_i = e$) ; dans les applications, les ions seront H^+ , He^+ , ou Ca^{2+} . Pour simplifier, on supposera en outre qu'il n'y a qu'une seule espèce d'ions (en fait, il y a plusieurs). La neutralité électrique, dont on se sera éloigné jamais beaucoup dans un plasma (en raison des champs électriques énormes qu'entraîne une séparation de charge, même légère), implique $n_e = n_i$.

de Debye longueur λ_D

$$\beta T = \frac{e^2}{k_B T}$$

$$r = \frac{1}{\beta T}$$

et on a :

Mais, sous d'une millième l'effet d'écran des ions d'ions le temps de relaxation (46) il est donc préférable d'adopter dans l'expression (17) $\lambda_D = \lambda_{De}$.

Comme $\Lambda = \lambda_D / r_0$, le nombre d'impact critique, dépend de $\vec{w}$ et $\vec{w}'$.
n'intervient dans la formule (26) que par son logarithme.
valeur moyenne sur les distributions de vitesse $\vec{w}$ et $\vec{w}'$:

- pour $b = a$ (e ou i) $\langle |\vec{w} - \vec{w}'|^2 \rangle = 2 \langle \vec{w}^2 \rangle = \frac{6 k_B T_a}{m}$

soit $\langle |\vec{w} - \vec{w}'|^2 \rangle = \frac{6 k_B T_a}{m}$ et $\langle |\vec{w} - \vec{w}'|^2 \rangle = \frac{6 k_B T_a}{m}$

- pour $b \neq a$ (e et i) $\langle |\vec{w} - \vec{w}'|^2 \rangle = \frac{6 k_B T_a}{m} + \frac{6 k_B T_i}{m}$

soit $\langle |\vec{w} - \vec{w}'|^2 \rangle = \frac{6 k_B T_a}{m} + \frac{6 k_B T_i}{m}$

1. L'expression (46) est obtenue en négligeant l'effet d'écran des ions. On a donc $\lambda_D = \lambda_{De}$.
2. L'expression (47) est obtenue en négligeant l'effet d'écran des ions. On a donc $\lambda_D = \lambda_{De}$.
3. L'expression (48) est obtenue en négligeant l'effet d'écran des ions. On a donc $\lambda_D = \lambda_{De}$.

... (1) ... et ...

... (2) ...

$$\Lambda = \Lambda_{ee} = \frac{e^2}{\langle p_0 \rangle_{ee}} = \frac{12\pi}{n^{1/2}} \left(\frac{\epsilon_0 k T_e}{e} \right)$$

... (3) ...

$$\dots \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} \int \dots \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} \dots$$

$$\dots \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} \dots$$

... (4) ...

... (5) ...

... (6) ...

... (7) ...

... (8) ...

... (9) ...

... (10) ...

$$\dots \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} \dots$$

$$\dots \sqrt{\frac{kT_e}{m_e}} \dots$$

...

...

$$\frac{1}{V} = \frac{1}{V} \int (\vec{v} \cdot \vec{v}) d\vec{v}$$

$$= n m \langle (\vec{v} - \vec{v}_0)^2 \rangle$$

(pression thermique)

$$T = \frac{1}{k_B} \frac{1}{2} \int (\vec{v} - \vec{v}_0)^2 d\vec{v} = \frac{m}{2k_B} \langle (\vec{v} - \vec{v}_0)^2 \rangle$$

température

$$\vec{J} = \frac{1}{V} \int (\vec{v} \otimes \vec{v}) d\vec{v} = \frac{1}{V} \langle (\vec{v} \otimes \vec{v}) \rangle$$

(flux de ...)

On introduit une dérivée partielle par rapport aux vitesses, on a une
relation de somme partielle, $\langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = 3 \langle v^2 \rangle$. On introduit l'équation de
continuité pour la distribution des vitesses (conservation du nombre de particules)
 $\frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle = 0$ (on utilise aussi la relation)

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle = \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \rangle = - \langle \frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}} \rangle = - \left[\frac{\partial}{\partial \vec{v}} \cdot \left(\frac{\partial \vec{F}}{\partial \vec{v}} \right) \right] + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{\partial v_i^2} \langle \vec{v} \rangle = 0$$

On introduit la relation de virial (conservation de l'énergie)

où μ désigne la masse volumique, $\vec{f}$ la densité de force ($\int \vec{f} d\tau$ est la force de volume s'exerçant sur l'élément de volume $d\tau$ à laquelle il faut ajouter la force superficielle $= \mu_0 \int \vec{f} d\tau$, liée à la distance d'une position superficielle $\vec{r}$ et $\vec{v}$ la vitesse de l'élément de volume $d\tau$

Elle en diffère d'une part, par la présence du terme de collisions $n m \langle \Delta \vec{w} \rangle$, (essentiel pour l'étude, que nous avons en vue, de phénomènes individuels), d'autre part, parce qu'elle est une équation relative à un type de particules (il y a autant d'équations (20) que de types de particules, soit $q = 1$, s'il y a 1 type d'ions; chacune d'elles exprime la conservation de la quantité de mouvement pour le type de particule auquel elle se rapporte⁽²⁾).

• $\frac{d}{dt} = \frac{1}{2} m \vec{w}^2$ conduit à :

$$\frac{dE}{dt} = - (5/4) \epsilon \operatorname{div} \vec{v} - \operatorname{div} \vec{Q} - \frac{\vec{v}}{n} \cdot \frac{\vec{v}}{n} + R - \vec{f} \cdot \vec{v}$$

où d/dt est la dérivée hydrodynamique; $E = \frac{1}{2} m n \langle \vec{w}^2 \rangle$ est la densité d'énergie cinétique; $\vec{Q}$ le vecteur flux de chaleur (cf. ci-dessus); $\frac{\vec{v}}{n} \cdot \frac{\vec{v}}{n} = \frac{1}{2} \mu \vec{v}^2$ le tenseur cisaillement ($\mu = \frac{1}{2} n \langle \vec{v} \otimes \vec{v} \rangle$); $\vec{Q} = \frac{1}{2} m n \langle \vec{v} \otimes \vec{v} \rangle$ le tenseur flux de cisaillement; $R = \frac{1}{2} m n \langle \Delta \vec{w}^2 \rangle$. Cette équation exprime la conservation de l'énergie, pour chaque type de particule.

(2) Les deux équations usuelles de magnétohydrodynamique :

$$\mu \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \operatorname{grad} p - \vec{J} \wedge \vec{B} = 0$$

(homologue de (20) : $\vec{v} = \vec{J} \wedge \vec{B}$, $\operatorname{div} \vec{J} = \operatorname{grad} p$)

$$\text{et } \vec{E} = \vec{v} \wedge \vec{B} = \eta \vec{J} - \frac{1}{n e} \operatorname{grad} p_e + \frac{1}{n e} \vec{J} \wedge \vec{B} + \frac{m_e}{n e} \frac{\partial \vec{J}}{\partial t}$$

(qui généralise - dans le référentiel entraîné à la vitesse $\vec{v}$ - la loi d'Ohm, $\vec{E}' = \eta \vec{J}'$, par adjonction d'un terme thermoelectrique $-(1/n e) \operatorname{grad} p_e = \frac{1}{n e} \operatorname{grad} p_e$ qui a pour origine l'effet Hall $(1/n e) \vec{J} \wedge \vec{B}$ et d'un terme $(m_e / n e) \partial \vec{J} / \partial t$ dû aux phénomènes transitoires), se déduisent des équations (20) en faisant un certain nombre d'approximations. On suppose que le plasma est voisin de l'équilibre thermodynamique, et que :

- les pressions restent scalaires $\vec{P} = p \vec{I}$, $\vec{P}_e = p_e \vec{I}$ et $p_e \ll p$
- il revient à l'équilibre thermodynamique, caractérisé par $\vec{v} = 0$ et la l'équilibre thermodynamique $\vec{w} = 0$, $\vec{J} = 0$ peut être traité en perturbation : on se borne à conserver que les termes de premier ordre en $\vec{v}$ et $\vec{J}$ ($[1st]$, $[0st]$, $[0st]$, $[1st]$)

où φ est une fonction connue (*) de la variable $\vec{r}$, dépendant des paramètres $T(\vec{r}, t)$ (température) et $\vec{v}(\vec{r}, t)$ (vitesse moyenne).

Pour chaque type de particule, l'inconnue n'est plus alors la fonction de distribution $f(\vec{r}, \vec{v}, t)$, mais les grandeurs macroscopiques directement intéressantes $n(\vec{r}, t)$ (densité), $\vec{v}(\vec{r}, t)$ et $T(\vec{r}, t)$. Souvent même on pourra considérer T comme une donnée et ne plus conserver comme inconnues que $n(\vec{r}, t)$ et $\vec{v}(\vec{r}, t)$.

Pour déterminer ces deux fonctions on utilisera l'équation de continuité (27)

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \text{div}(n\vec{v}) = 0 \quad (27)$$

l'équation de transport de la quantité de mouvement (28) : (xx)

(*) Il n'existe évidemment pas de critère général pour choisir les variables d'état $\vec{r}$.

On peut aussi considérer les coordonnées des particules, les vitesses, les positions, les temps, les forces, etc. Le fait qu'un état donné à des instants t_1 et t_2 soit compatible avec les lois de la physique ne signifie pas qu'il soit compatible avec les lois de la physique à tout instant. On peut donc se demander si les lois de la physique sont compatibles avec les lois de la physique à tout instant. La réponse est négative. Les lois de la physique sont compatibles avec les lois de la physique à tout instant, mais elles ne sont pas compatibles avec les lois de la physique à tout instant.

(xx) On peut aussi considérer les coordonnées des particules, les vitesses, les positions, les temps, les forces, etc. Le fait qu'un état donné à des instants t_1 et t_2 soit compatible avec les lois de la physique ne signifie pas qu'il soit compatible avec les lois de la physique à tout instant. On peut donc se demander si les lois de la physique sont compatibles avec les lois de la physique à tout instant. La réponse est négative. Les lois de la physique sont compatibles avec les lois de la physique à tout instant, mais elles ne sont pas compatibles avec les lois de la physique à tout instant.

2.5 COLLISION

Lorsque le jeu est plus long, les événements individuels (liés aux collisions) ne sont pas négligeables devant les événements collectifs. On dispose pour les deux cas d'une équation de Boltzmann approchée, l'équation de Fokker - Planck (F.P.).

Cette équation contient deux coefficients (α coefficient de frottement, et β coefficient de diffusion) qui dépendent de l'état du plasma (plus précisément des distributions de vitesse des différents types de particules).

Les expressions générales dues à Rosenbluth, MacDonald et Judd, de ces deux coefficients permettent d'appliquer l'équation (1) à un plasma hors d'équilibre thermodynamique et en particulier - moyennant une légère extension que nous avons introduite (§ 1.4.4) - à un plasma où les températures électronique et ionique sont radicalement différentes.

Sur la base des coefficients (calculés comme il vient d'être dit) l'équation 2' de la présente sous-section est immédiatement et automatiquement construite, inexploitable presque toujours. Une méthode approchée est indiquée (en 1.4.5) qui permet de franchir cette difficulté, et qui présente en outre l'avantage de fournir directement des paramètres physiques moyennes : densité, vitesses moyennes, observables expérimentalement.

Cette méthode diffère de la méthode magnétohydrodynamique : elle conduit à des grandeurs moyennes, non globales (relatives à un élément de volume de fluide ionisé continu), mais relatives à chaque trou de particules.

2.- BIBLIOGRAPHIE

- [1] D. BOHM, D. PINES : Phys. Rev., 85, 338 (1952) ; J. Nucl. Energy Part C, 2, 5 (1961).
- [2] I. LANGMUIR : Phys. Rev., 33, 954 (1929).
- [3] J. YVON : Actualités scient. & ind., Hermann, PARIS (1935).
- [4] N.N. BOGOLJUBOV, Zh. èksp. i teor. fiz., 10, 256 (1946).
- [5] [7] M. BORN, H.J. GREEN : Proc. Roy. Soc., A, 118, 10 (1946).
- [6] J.G. KIRKWOOD : J. Chem. Phys., 14, 180 (1946).
- [8] B.B. KADOMTSEV : Zh. èksp. i teor. fiz. 33, 151 (1957).
- [9] A. EINSTEIN : "Zur Theorie der Brownschen Bewegung", Ann. der Phys. 13, 371, (1906).
- [10] A.D. FOKKER : "Die mittlere Energie rotierender Elektraden-Eipole im Strahlungsfeld", Ann. der Phys., 23, 810 (1914).
- [11] M. PLANCK : "Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Anwendung in der Quantentheorie", Sitzungsber. der Preuss. Akad. der Wiss., phys.-math. Klasse, 384 (1917).
- [12] O. KLEIN : Archiv for Mathematik, Astronomi, och Fysik. 6, n° 3 (1922).
- [13] R.A. FRAZER : Physica, 7, 284 (1940).
- [14] S. CHANDRASEKHAR : Rev. of Mod. Phys., 15, n° 1 (1943).
- [15] A. KOLOMOGOROV : Math. Ann., 104 (1930).
- [16] A. KHINCHIN : Ergatternisse der Math., 2, 4 (1933).
- [17] I. PETROVSKIJ : Math. Ann., 103, (1930).
- [18] W. FELLER : Math. Ann., 113, (1934).
- [19] S. GASICOWICZ, M. NEUMAN, R.J. KIDDELL : Phys. Rev., 101, 1000 (1956).

- [20] B.M. BOGOLYUBOV : "Problemy dinamicheskoy teorii i statisticheskoy fiziki", GITTL, MOSCOW (1946).
- [21] S.E. UL'YANOV : "Leçons sur la Statistique Mécanique et les Systèmes Dynamiques", Université de Moscou (1954), Proc. of the 1954 Symp. on Transport Processes in Statistical Mechanics, Inters. Publ., N.Y. (1955).
- [22] W.S. UNDES : J. Chem. Phys., 22, 636 (1956) ; 23, 200 (1958).
- [23] L. VAN HOVE : Rev. Mod. Phys., 29, 200 (1957).
- [24] A. LENARD : Annals of Phys., 3, 390 (1960).
- [25] R. DAIKESCU : Physica, 25, 324 (1959) ; Phys. Fluids 3, 52 (1960) ; J. Math. Energy, C, 2, 169 (1961).
R. GURDUSKY, Thèse de Ph. D., Université de Michigan (1960).
- [26] L.D. LANDAU : Phys. L. Sovjetunion 10, 154 (1936) ; Zh. Eksp. i teor. fiz., 7, 203 (1937).
- [27] S.V. TROSH : Zh. Eksp. i teor. fiz., 31, 1021 (1956).
- [28] V.V. VOZNACHEV : Dokl. Akad. Nauk, 112, 842 (1957).
- [29] S.B. RADOMIRSKY : Zh. Eksp. i teor. fiz., 32, 151 (1957) = [8].
- [30] R. HUSTONEN, M.N. BOGOLYUBOV : Phys. Fluids 3, 1 (1960).
- [31] A. L. KLIMONTOVICH : Zh. Eksp. i teor. fiz., 36, # 3 (1959).
- [32] A. L. KLIMONTOVICH : Zh. Eksp. i teor. fiz., 35, # 5 (1958).
- [33] A. SIMON, F.O. HARRIS : Phys. Fluids 3, 243 (1960).
- [34] A. L. KLIMONTOVICH, V.F. STILIN : Dokl. Akad. Nauk 85, 361 (1952).
V.F. STILIN : Zh. Eksp. i teor. fiz., 3, 199 (1955).
A. L. KLIMONTOVICH, S.V. TROSH : Zh. Eksp. i teor. fiz., 33, 132 (1957).
- [35] R. HUSTONEN : Phys. Fluids 3, 386 (1961).
- [36] C.A. JONES : Phys. Rev., 114, 390 (1959).
- [37] B.T. BELJAKI : in "Problemy dinamicheskoy teorii i statisticheskoy fiziki", MOSCOW (1953) (vol. 1).

- [38] A.I. GURMAN, E.T. MELJANOV : in "Fizika iustitsy i porozheniya ioniziruyemykh reaktsii", MOSCOW (1958) (Vol. 2).
- [39] R. ROEDERER, R.H. ROSENBLUTH : J. Nucl. Energy, C, 155 (1957).
- [40] R. ROEDERER, R. GILES : Conférences sur la physique des plasmas et la physique connexe de la fusion contrôlée, (AIRE), BRISTOL (1961) (in-press).
- [41] E. MEERON : Phys. Rev. 124, 308 (1961).
- [42] E. CHANDRASEKHAR : "Principles of Stellar Dynamics", University of Chicago Press, CHICAGO (1942) ; Astrophys. J., 47, 255 (1943).
- [43] R.H. ROSENBLUTH, W.W. MAC DONALD, D.L. JUDS : Phys. Rev., 107, 1 (1957).
- [44] A.N. KAUFMAN : in "La théorie des gaz neutres et ionisés", Gauthier-Villars, PARIS (1959).
- [45] J.L. LEBLANC : "Introduction à la théorie des gaz ionisés", Dunod, PARIS (1959).
- [46] R. KADANAK : Ann. N.Y. Acad. Sciences, 41, 49 (1941).
- [47] R. SPILZER : "Physics of fully ionized gases", Interscience, Publ., NEW YORK (1955).
- [48] R. WARECKE, L. LEBLANC : "Les accélérateurs de particules", Gauthier-Villars, PARIS (1962).
- [49] J.M. DOLIQUE : Ann. de Radioélectricité, 14, 107 (1959).

2.- ETUDE THEORIQUE DES COLLISIONS DANS LES PLASMAS A IONS CHAUDS.

2.1.- INTRODUCTION.

On va appliquer les équations générales du chapitre précédent à l'étude des collisions dans les plasmas considérés ci-dessus, et en particulier, on examinera les coefficients de transport et la diffusion de porteurs, des ions moyennés d'après les résultats de la théorie des collisions, des fréquences de collision, et de la résistivité électrique.

Les grandeurs sont les mêmes que les précédentes, on en trouve dans la littérature sont relatives, soit à un plasma à l'équilibre thermodynamique, soit à un plasma où les ions sont "froids" ($T_i \ll T_e$).

Or, dans nombre de situations expérimentales, les ions sont beaucoup plus chauds que les électrons ($T_i \gg T_e$). Il en est ainsi, aussi bien dans les plasmas confinés par des bouillottes magnétiques, en vue de la fusion nucléaire contrôlée (chapitre 3), que dans les plasmas utilisés pour la propulsion (chapitre 4). Il serait donc intéressant de pouvoir établir des expressions applicables à des plasmas où $T_i \gg T_e$. C'est le but de ce chapitre.

La complexité des calculs oblige à choisir des fonctions de distribution des vitesses (électronique et ionique) très simples.

On examinera d'abord le cas où les électrons et les ions sont encore à l'équilibre thermodynamique, mais séparément, avec des températures T_e et T_i différentes, et $T_i \gg T_e$ (le plasma n'étant donc plus à l'équilibre).

On abordera ensuite le cas général où électrons et ions sont hors d'équilibre thermodynamique, avec des vitesses de dérive $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$ et $T_e \gg T_i$.

(*) L'existence d'une température distincte en thermodynamique plasma à l'équilibre d'équilibre. La même température est utilisée par les deux espèces.

2.2. - CAS OU ÉLECTRONS ET IONS SONT SÉPARÉMENT EN ÉQUILIBRE THERMODYNAMIQUE, AVEC $T_e \neq T_i$.

Les fonctions de distribution sont maxwelliennes :

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{n_s(\vec{r}, t)}{(2\pi)^{3/2} v_{Ts}^3} e^{-\frac{\vec{v}^2}{2v_{Ts}^2}}$$

$$f(\vec{r}, \vec{v}, t) = \frac{n_s(\vec{r}, t)}{(2\pi)^{3/2} v_{Ts}^3} e^{-\frac{\vec{v}^2}{2v_{Ts}^2}}$$

où $v_{Te} = (\beta T_e / m_e)^{1/2}$ et $v_{Ti} = (\beta T_i / m_i)^{1/2}$ désignent les vitesses thermiques des électrons et des ions. L'équilibre thermodynamique du plasma correspond au cas particulier $T_e = T_i$.

2.3.1 - Coefficient de ralentissement d'une particule (ou freinage dynamique)

L'application de la formule (22) du chapitre I à des distributions maxwelliennes de « plasma » conduit (cf. équation 2.1) à :

$$\langle \dot{W} \rangle = - \frac{\omega}{\omega_p} \frac{\omega}{k} \left(1 + \frac{m_e}{m_i} \right) \frac{\omega}{v_{Te}} S(\omega/k)$$

où les vitesses v_{Te} et v_{Ti} sont les vitesses thermiques des électrons et des ions.

$\eta(x) = (1/2\pi) (C(x) - x(C/dx/d\phi) \phi) (x, \text{direction d'axe } x) \quad \eta =$
 $(1/2\pi) \sigma = 1/2\pi \quad \eta = w_{fc} \quad \text{ : valeur la plus probable pour } \eta \text{ par } \sigma$
 (dans ce type b).

$$\langle \Delta w \rangle = - \frac{\Gamma \bar{w}}{w} \approx n_e G(u) - \frac{\Gamma \bar{w}}{w} \frac{1}{n_e} \frac{m \lambda n}{m_e}$$

étant les moyennes, (sur les électrons
 normés à l'unité) des variations, par unité de temps, de la
 ... des collisions électrostatiques et des
 collisions électromagnétiques. Il est intéressant de constater $\langle \Delta w \rangle \approx \frac{1}{2} \frac{v^2}{c^2}$

$$\frac{\langle \Delta w \rangle_{el}}{\langle \Delta w \rangle_{em}} = \frac{\sigma_{el}}{(1 - \frac{v^2}{c^2}) n_e} \frac{\frac{1}{r^2} G(\frac{v}{c})}{G(\frac{w}{w_0} \frac{v}{c})} \approx \frac{v^2}{c^2} \frac{G(\frac{v}{c})}{G(\frac{w}{w_0} \frac{v}{c})}$$

$$\langle \Delta w \rangle_{el} \approx \langle \Delta w \rangle_{em} \approx 1/2 \frac{v^2}{c^2}$$

La figure 2 représente les variations de $\langle \Delta w \rangle_{el} / \langle \Delta w \rangle_{em}$
 en fonction de v/c , pour $\Gamma/\Gamma_0 = 10^{-3}$ (protons), en supposant
 que $\Gamma/\Gamma_0 = 10^{-3}$ est une valeur moyenne entre les deux cas extrêmes
 que se rencontrent fréquemment les électrons en collision avec les
 autres électrons ($\Gamma/\Gamma_0 = 10^{-3}$). Les courbes sont les courbes

pour les fréquences vitales ($\omega > \omega_{10}$). Quand $T_e \geq T_0$, ce sont les collisions entre les électrons qui règlent la plus les électrons de vitesse $\vec{v}$, quelle que soit ω .

Dans les cas, on a :

$$\vec{v} \cdot \vec{v} = - \left(\frac{\vec{v}}{v} + \frac{\vec{v}}{v} \right) = \left(\frac{\vec{v}}{v} + \frac{\vec{v}}{v} \right) \frac{\partial}{\partial v} G(v)$$

$$= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} G(v) \right)$$

On a :

$$\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} G(v) \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} G(v) \right) \right) \right) = \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} G(v) \right) \right) \right)$$

$$= \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{1}{v^2} \frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} G(v) \right) \right) \right)$$

On suppose que la distribution de $G(v)$ est telle que $G(v) \sim v^{-2}$ pour $v \rightarrow \infty$. On a alors $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} G(v) \right) \sim v^{-3}$ pour $v \rightarrow \infty$. On suppose aussi que $G(v) \sim v^{-2}$ pour $v \rightarrow 0$. On a alors $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} G(v) \right) \sim v^{-3}$ pour $v \rightarrow 0$. On suppose enfin que $G(v) \sim v^{-2}$ pour $v \rightarrow \infty$. On a alors $\frac{\partial}{\partial v} \left(\frac{v^2}{2} G(v) \right) \sim v^{-3}$ pour $v \rightarrow \infty$.

Si, au lieu d'envisager deux populations de particules : (a) et (b) (electrons ou ions), chacune à l'équilibre thermodynamique, on envisage une seule population (b), à l'équilibre thermodynamique, dans laquelle se propage un faisceau de particules a (a et b pouvant être identiques), qui avaient, à l'instant 0, toutes la même vitesse $\vec{w}$, le coefficient de friction classique $\langle \Delta \vec{w} \rangle_a$, valeur moyenne du relaxation des particules a, en une seconde, due aux collisions a-b est relié à $\langle \Delta \vec{w} \rangle_{a,b}$ par :

$$\langle \Delta \vec{w} \rangle_a = \langle \Delta \vec{w} \rangle_{a,b} = - \Gamma_a \frac{\vec{w}}{w} \left(1 + \frac{m_a}{m_b} \right) \frac{n_b}{T_b} G(w/\sqrt{2} \sigma_e)$$

On retrouve la formule de CHANDRASEKHAR ([1],[2]).

2.2 - Coefficient de diffusion

La formule (27) du chapitre 1 donne (cf. appendice 2) :

$$\langle \Delta \vec{w} \otimes \Delta \vec{w} \rangle = \frac{\Gamma_a}{w} \frac{2\pi n_b}{T_b} \left(4 u_1 \vec{w} \otimes \vec{w} + \int_0^\infty u_2 \vec{w} \otimes \vec{w} - u_3 \vec{w} \otimes \vec{w} \right)$$

$$u_1 = H(\beta) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta$$

$$u_2 = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos^2 \theta d\theta$$

Figure 5 représente les variations des fonctions u_1 et u_2 .

Il est commode d'introduire, à côté de ce coefficient de diffusion tensoriel (qui est celui que contient le deuxième moment de l'équation de FOKKER-POLANCK) des coefficients scalaires. On utilisera la trace et les valeurs propres de $\langle \vec{\Delta w} \otimes \vec{\Delta w} \rangle_a$.

La trace de $\langle \vec{\Delta w} \otimes \vec{\Delta w} \rangle_a$: $\text{Tr}[\langle \vec{\Delta w} \otimes \vec{\Delta w} \rangle_a] = \langle \vec{\Delta w}, \vec{\Delta w} \rangle_a = \langle \Delta w^2 \rangle_a$ est ce qu'on peut appeler le carré moyen de la vitesse au point a .

$$\langle \Delta w^2 \rangle_a = \frac{2\pi^2}{\omega} \sum_k \gamma_k \Theta(k_A)$$

On suppose de nouveau que les $\langle \vec{\Delta w} \otimes \vec{\Delta w} \rangle_a$ sont proportionnels à $\vec{w}_a = \vec{w} / \omega$ et n'importe quel couple de vecteurs unitaires orthogonaux, perpendiculaires à $\vec{w}_a$ (il suffit de prendre deux des axes de symétrie de révolution autour de $\vec{w}$: puisque les directions de distribution sont isotropes).

Les valeurs propres $\langle \Delta w_1^2 \rangle$ et $\langle \Delta w_2^2 \rangle$, relatives à $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_2$ sont égales. On pose généralement :

$$\langle \Delta w_1^2 \rangle = \langle \Delta w_2^2 \rangle = \langle \Delta w_3^2 \rangle \quad \text{et} \quad \langle \Delta w_1^2 \rangle = \langle \Delta w_2^2 \rangle = \langle \Delta w_3^2 \rangle$$

Sur la base $\vec{e}_i \otimes \vec{e}_j$ ($i, j = 1, 2, 3$) on trouve donc :

$$\begin{pmatrix} \langle \Delta w_1^2 \rangle & 0 & 0 \\ 0 & \langle \Delta w_1^2 \rangle & 0 \\ 0 & 0 & \langle \Delta w_3^2 \rangle \end{pmatrix}$$

$$\langle \Delta w_x^2 \rangle = \frac{2\pi}{\omega} \sum_k \tilde{v}_k |A(k)|^2$$

$$\langle \Delta w_x^2 \rangle = \frac{2\pi}{\omega} \sum_k \tilde{v}_k \mathcal{H}(k) \quad (1)$$

$\langle \Delta w_x^2 \rangle$ coefficient de diffusion transverse, est le moment d'ordre 2 de la variable aléatoire Δw_x (ou Δw_y), d'où l'on a :
 puisque $\langle \Delta w_x \rangle = \langle \Delta w_y \rangle = 0$. $\langle \Delta w_x^2 \rangle$ mesure donc la dispersion de la vitesse transverse (il doit être positif).

$\langle \Delta w_x^2 \rangle$ coefficient de diffusion longitudinale, est le moment d'ordre 2 de Δw_x . La variable correspondante, qui mesure la dispersion de la vitesse longitudinale (il doit être positif) est :

$$\frac{1}{2} (\Delta w)^2 = \langle \Delta w_x^2 \rangle - \langle \Delta w_y^2 \rangle = \langle \Delta w_p^2 \rangle - \langle \Delta w_t^2 \rangle$$

(2)

Il est le twice (carré) du coefficient de diffusion.

En outre, on peut définir les coefficients de diffusion :

1) coefficient global de diffusion

qui est :

$$\langle \Delta w^2 \rangle_a = \langle \Delta w^2 \rangle_{ab} + \langle \Delta w^2 \rangle_{ab}$$

avec :

$$\langle \Delta w^2 \rangle_{ab} = \frac{e \Gamma_a}{w} n_i \Theta(w_i)$$

et

$$\langle \Delta w^2 \rangle_{ab} = \frac{e \Gamma_a}{w} n_i \Theta(w_i)$$

D'où $\langle w_i \rangle n_i$

$$\frac{\langle \Delta w^2 \rangle_{ab}}{\langle \Delta w^2 \rangle_{ab}} = \frac{\Theta(w/w_{e0})}{\Theta(\sigma_e w / \sigma_i w_{e0})}$$

et

$$\frac{\langle \Delta w^2 \rangle_{ab}}{\langle \Delta w^2 \rangle_{ab}} = \frac{\Theta(w/w_{e0})}{\Theta(\sigma_e w / \sigma_i w_{e0})}$$

Les figures 4 et 5 représentent les variations de ces deux rapports, en fonction, respectivement, de w/w_{e0} et de w/w_{e0} , pour $T_e/T_i = 10^{-4}, 1, 10^4$ (ordonné).

Elles montrent qu'en faibles vitesses ($w < w_{e0}$ ou w_{e0}), la diffusion globale d'un électron ou d'un ion est essentiellement due aux

chocs contre les ions, tant qu'on n'a pas $T_i \gg T_e$. Pour $T_i \gg T_e$, le rôle des chocs électron-électron devient prépondérant.

Aux grandes vitesses, (très grandes vitesses pour les ions), les deux types de collisions ont la même importance.

2) Coefficient de diffusion longitudinale $\langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle$

On a :

$$\langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle = \langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle_{ee} + \langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle_{ei}$$

$$\langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle_{ee} = \frac{kT_e}{m} \cdot G(\eta_e) \approx \frac{kT_e}{m} \left(\frac{\pi}{2} \right) \langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle_{ee}$$

$$\langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle_{ei} = \frac{kT_e}{m} \cdot \eta_i \cdot G(\eta_i) = \frac{e}{1 + \frac{T_e}{T_i}} \left(\frac{\pi}{2} \right) \langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle_{ei}$$

Or :

$$\frac{\langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle_{ee}}{\langle \Delta \omega_{||}^2 \rangle_{ei}} = \frac{G(\eta_e) \left(\frac{\pi}{2} \right)}{G(\eta_i) \left(\frac{\pi}{2} \right)}$$

et

$$\frac{\langle \Delta w_{\parallel}^2 \rangle_{i,e}}{\langle \Delta w_{\parallel}^2 \rangle_{i,e}} = \frac{G(w/w_{io})}{G(\frac{T_e}{T_i} \frac{w}{w_{io}})}$$

Les figures 6 et 7 représentent les variations de ces deux rapports, en fonction respectivement, de w/w_{io} et w/w_{ie} , pour $\frac{T_e}{T_i} = 10^4$ (protons).

La figure 6 montre que, tant qu'on n'a pas $T_i \gg T_e$, la diffusion longitudinale des électrons est essentiellement due aux collisions électron-électron (sauf pour les très faibles vitesses $w \ll w_{io}$). Pour $T_i \gg T_e$, les contributions des collisions électron-électron et électron-ion sont voisines, les premières l'emportant aux faibles vitesses, les secondes aux fortes vitesses.

La figure 7 montre que, tant qu'on n'a pas $T_i \gg T_e$, la diffusion longitudinale des ions est essentiellement due aux ions (sauf pour les très fortes vitesses, $w \gg w_{io}$). Pour $T_i \gg T_e$, les contributions des collisions ion-ion et ion-électron sont voisines, les premières l'emportant aux grandes vitesses, les secondes aux faibles vitesses.

3) Coefficient de diffusion transverse $\langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle$

On a :

$$\langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_a = \langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_{aa} + \langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_{a0}$$

avec

$$\langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_{aa} = \frac{T_a}{w} n_a H(w_a)$$

et :

$$\langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_{ab} = \frac{\Gamma_a}{w} n_b H(u_b)$$

$$u_b = (v_b / v_e)$$

$$\frac{\langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_{ae}}{\langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_{ie}} = \frac{H(w/w_{e0})}{H\left(\frac{\Gamma_e}{\Gamma_i} \frac{w}{w_{i0}}\right)}$$

et

$$\frac{\langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_{ie}}{\langle \Delta w_{\perp}^2 \rangle_{ic}} = \frac{H(w/w_{i0})}{H\left(\frac{\Gamma_i}{\Gamma_c} \frac{w}{w_{i0}}\right)}$$

Les figures 8 et 9 représentent les variations de ces deux rapports, en fonction respectivement, de w/w_{e0} et w/w_{i0} , pour $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_e} = 10^{-4}, 1, 10^4$ (procure).

Elles montrent qu'aux faibles vitesses, la diffusion ionosphérique est dominée par les ondes réfléchies contre les ions, et qu'elle est dominée par les ondes réfléchies contre les électrons aux grandes vitesses. Pour $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_e} \gg 1$, la diffusion ionosphérique est dominée par les ondes réfléchies contre les électrons.

Aux grandes vitesses, la diffusion ionosphérique est dominée par les ondes réfléchies contre les électrons, et la diffusion ionosphérique est dominée par les ondes réfléchies contre les électrons.

2.2.2. Les coefficients de diffusion

Aux différents coefficients précédents : de diffusion dynamique, de diffusion longitudinale, de diffusion transversale, on peut associer des temps et des fréquences de relaxation. Ainsi, au coefficient de friction, on associe des relaxations sur les ions $\langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei}$, correspondant le temps de relaxation longitudinal τ_{ei} défini par

$$\langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei} \tau_{ei} = -w$$

un électron ayant initialement une vitesse $\vec{w}$ dirigée selon Oz , voit sa vitesse selon cet axe annulée, par suite des collisions contre les ions, au bout d'un temps τ_{ei} .

$$\frac{d\langle \vec{w} \rangle}{dt} = -\frac{w}{\tau_{ei}} \quad \text{soit} \quad \tau_{ei} = -\frac{w}{\langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei}}$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{\tau_{ei}} + \frac{1}{\tau_{ee}} \quad \text{soit} \quad \tau = \tau_{ei} + \tau_{ee}$$

Le coefficient de diffusion longitudinale est défini par la relation : $D_L = \frac{1}{2} \frac{d\langle w^2 \rangle}{dt}$ et le coefficient de diffusion transversale est défini par la relation : $D_T = \frac{1}{4} \frac{d\langle w^2 \rangle}{dt}$.

On peut montrer que les coefficients de diffusion sont liés aux coefficients de friction par les relations : $D_L = \frac{1}{2} \frac{w^2}{\tau}$ et $D_T = \frac{1}{4} \frac{w^2}{\tau}$.

D'après (1), on a :

$$\frac{f}{e}(w) = \frac{\Gamma_c}{w^3} \left[n_c H\left(\frac{w}{w_{c0}}\right) + n_i H\left(\frac{w}{w_{i0}}\right) \right]$$

$$= \frac{\Gamma_c}{w^3} \left[n_c H\left(1 - \left(\frac{w}{w_{c0}}\right)^2\right) \right]$$

La figure 10 représente les variations de $\frac{f}{e}(w)$ en fonction de $w/w_{c0} = u$, pour $\frac{w}{w_{c0}} \leq 1$ et $\frac{w}{w_{i0}} \leq 1$. On voit que la fréquence de collision électronique devrait être relativement grande la vitesse w croît (sauf si $w_{c0} = 10^5$ et $w_{i0} = 10^5$ et à un moment de l'ordre de 10^{10}).

On peut définir des fréquences supérieures. On a ainsi, pour la fréquence de collision électronique supérieure :

$$\omega_{ce}^{\text{sup}} = \langle \frac{f}{e}(w) \rangle_{\infty} = \frac{\pi \Gamma_c n_c}{(2\pi)^2 \epsilon_0^2} \int_0^{\infty} \frac{e^{-u^2}}{u} \left(H(u) + H\left(\frac{T}{T_c} u\right) \right) du$$

$$= \frac{\pi \Gamma_c}{(2\pi)^2 \epsilon_0^2} \left[H(1) + 8 \left(\frac{T}{T_c} \right) \right] = \frac{\sqrt{2} \pi n_c B_0 A}{4\pi^2 \epsilon_0^2 u^2 \Gamma_c} \left(H(1) + 8 \left(\frac{T}{T_c} \right) \right)$$

$$\omega_{ce}^{\text{sup}} = 1.4 \frac{\sqrt{2} \pi n_c B_0 A}{4\pi^2 \epsilon_0^2 u^2 \Gamma_c}$$

$\langle \nu_{ee} \rangle$, fréquence moyenne des collisions électron-électron, est indépendante de T_e (ce qui était évident) : $\langle \nu_{ei} \rangle$, fréquence moyenne des collisions électron-ion, décroît lentement quand T_e croît ($\langle \nu_{ei} \rangle \left(\frac{T_i}{T_e} = 10^{-4} \right) \approx 0,05 \langle \nu_{ei} \rangle \left(\frac{T_i}{T_e} = 10^{-4} \right)$).

La figure 11 représente les variations de la fonction $h(x)$

2.2.4.- Equations de transport.

Les équations de continuité sont, on l'a vu, indépendantes de la forme particulière des fonctions de distribution. Les équations de transport de la quantité de mouvement s'écrivent :

$$n_e m_e \frac{\partial \vec{v}_e}{\partial t} + n_e m_e \vec{v}_e \cdot \text{grad} \vec{v}_e + \text{div} \vec{p}_e + n_e e (\vec{E} + \vec{v}_e \wedge \vec{B}) = \frac{\vec{p}_e}{\tau_e}$$

et équation analogue pour les ions ; où $\vec{v}_e \equiv \langle \vec{w}_e \rangle$ ($\langle \rangle$ désigne la moyenne prise sur la distribution des vitesses électroniques).

$\vec{p}_e = n_e m_e \langle \Delta \vec{w}_e \rangle$ ($\langle \Delta \vec{w}_e \rangle$, coefficient de friction dynamique est une fonction de $\vec{w}_e$: $\langle \Delta \vec{w}_e \rangle (\vec{w}_e)$). $\vec{p}_e$ est, rappelons-le, la quantité de mouvement échangée entre électrons et ions, par unité de volume et par unité de temps.

$$\vec{p}_e = n_e m_e \langle (\vec{w}_e - \vec{v}_e) \otimes (\vec{w}_e - \vec{v}_e) \rangle \quad (\text{plasma})$$

Pour une distribution Maxwellienne des vitesses électroniques,

on a :

$$\vec{p}_e = n_e m_e \left(\frac{m_e T_e}{\pi} \right)^{3/2} \frac{\vec{v}_e}{\tau_e} \quad \left(\frac{1}{\tau_e} = \frac{4}{3} \pi n_i e^2 \frac{1}{m_e} \right)$$

$$\vec{\mu}_2(\vec{w}) = \langle \vec{w} - \vec{v} \rangle \otimes (\vec{w} - \vec{v}) \quad \text{est diagonale :}$$

$$\vec{\mu}_2(\vec{w}) = \begin{pmatrix} \nabla_e^2 & 0 & 0 \\ 0 & \nabla_e^2 & 0 \\ 0 & 0 & \nabla_e^2 \end{pmatrix} = \nabla_e^2 \vec{I} = \frac{kT_e}{m_e} \vec{I}$$

d'où $\text{div} \vec{\mu}_2 = kT_e \text{grad } n_e$
 (on suppose que la température T_e est uniforme).

(on suppose que la température est uniforme).

On peut montrer enfin (cf. appendice 2.2) que :

$$\langle \langle \Delta \vec{w} \rangle (\vec{w}) \rangle = 0, \quad \text{d'où} \quad \vec{\mu}_2 = 0$$

ce qui signifie que dans un plasma où les ions et les électrons sont séparés à l'échelle de la longueur de Debye, les électrons et les ions sont en équilibre thermodynamique (avec $T_e = T_i = T$) et ont donc des vitesses moyennes nulles, les collisions entre particules étant alors de même espèce (et d'espèces différentes) se compensant par le transfert de la quantité de mouvement. Cela est en accord avec l'hypothèse de plasma idéal (la seule façon de rendre compte de la neutralité globale est de supposer $\vec{E} = 0$).

On définit la "fonction de courant" $\vec{J}$ par la relation de Maxwell :

$$kT_e \text{grad } n_e = \vec{J} \times \vec{B}$$

ce qui donne pour les ions :

$$k_B T_e \text{grad } n_i - n_i e \vec{E} = 0$$

2.2 - CAS 2 : ÉLECTRONES ET IONS ONT DES VITESSES DE DÉRIVE DIFFÉRENTES $T_e \neq T_i$

On va envisager la situation de ce type la plus simple théoriquement : celle où les distributions de vitesses électronique et ionique sont maxwelliennes excentrées, c'est à dire maxwelliennes autour de vitesses de dérive

$$f(\vec{v}) = \frac{n_i}{(2\pi)^{3/2} v_{ti}^3} \exp \left[-\frac{1}{2v_{ti}^2} (\vec{v} - \vec{v}_0)^2 \right] dv_x dv_y dv_z \quad (3)$$

$$v_{ti} = (k_B T_i / m_i)^{1/2} \quad (\text{vitesse thermique})$$

et une équation homogène pour les ions (pour $T_e = T_i$)

Les moments d'ordre 1 et 2 de cette distribution sont :

$$\langle \vec{v} \rangle = \vec{v}_0 \quad (\text{vitesse de dérive})$$

$$\langle (\vec{v} - \vec{v}_0) \otimes (\vec{v} - \vec{v}_0) \rangle = v_{ti}^2 \vec{I} \quad (\text{variance tensorielle})$$

On a donc, pour la pression :

$$\vec{p}_e = n_e m_e \langle (\vec{v}_e - \vec{v}_c) \otimes (\vec{v}_e - \vec{v}_c) \rangle = n_e m_e \sigma_e^2 \vec{I} = n_e k T_e \vec{I} \quad (4)$$

2.3.1 - Coefficients de ralentissement (friction dynamique) et de diffusion d'une particule.

L'application de la formule (1), du chapitre I à des distributions maxwelliennes excentrées de vitesses, telles que (3), conduit (cf. appendice 2.1 et [3]) à :

$$-\Delta \vec{v}_0 = - \Gamma \sum_i \frac{m_i}{m_e} \left(1 + \frac{m_i}{m_e} \right) G_i(u_i) \frac{\vec{v}_0}{u_i}$$

et

$$\Delta \vec{v}_0 \otimes \vec{v}_0 = \sum_i \frac{m_i}{m_e} \frac{G_i(u_i)}{u_i^3} \left[(u_i^2 - 1) \vec{v}_0 \otimes \vec{v}_0 + (u_i^2 + 1) \frac{\vec{v}_0 \otimes \vec{v}_0}{u_i^2} \right]$$

où les indices i et j désignent l'ensemble $\{e, i, e, i\}$; les constantes Γ et Δ sont celles qui ont été définies au § 2.2 : $\Gamma = \frac{1}{2} \sum_i \frac{m_i}{m_e} \frac{G_i(u_i)}{u_i^3}$ et $\Delta = \frac{1}{2} \sum_i \frac{m_i}{m_e} \frac{G_i(u_i)}{u_i^3}$.

En outre, on peut définir des coefficients scalaires de diffusion, qui sont la trace et les valeurs propres du coefficient tensoriel,

On se réfère par la suite à l'étude détaillée des variations des coefficients de friction dynamique et de diffusion, en fonction de la vitesse u (cf. annexe 2.1.1), les relations de (3) et (4) sont alors écrites sous la forme :

les vitesses les plus probables U_{e0} et U_{i0} et les résultats du § 2.2, en ce qui concerne l'allure de ces variations, restent alors valables.

2.3.2.- Equations de transport de la quantité de mouvement.

Pour les électrons, l'équation de transport de la quantité de mouvement s'écrit :

$$m_e n_e \frac{d\bar{U}_e}{dt} = -en_e E - \nabla_{\parallel} p_e + \nabla_{\perp}^2 p_e \quad (2.3.2.1)$$

De l'équation (2.3.2.1) on a :

$$\frac{d\bar{U}_e}{dt} = -\frac{en_e}{m_e n_e} E - \frac{\nabla_{\parallel} p_e}{m_e n_e} + \frac{\nabla_{\perp}^2 p_e}{m_e n_e}$$

$$\frac{d\bar{U}_e}{dt} = -\frac{en_e}{m_e n_e} E - \frac{\nabla_{\parallel} p_e}{m_e n_e} + \frac{\nabla_{\perp}^2 p_e}{m_e n_e}$$

Il vient :

$$\frac{d\bar{U}_e}{dt} = -\frac{en_e}{m_e n_e} E - \frac{\nabla_{\parallel} p_e}{m_e n_e} + \frac{\nabla_{\perp}^2 p_e}{m_e n_e}$$

$$\frac{d\bar{U}_e}{dt} = -\frac{en_e}{m_e n_e} E - \frac{\nabla_{\parallel} p_e}{m_e n_e} + \frac{\nabla_{\perp}^2 p_e}{m_e n_e}$$

$$\frac{d\bar{U}_e}{dt} = -\frac{en_e}{m_e n_e} E - \frac{\nabla_{\parallel} p_e}{m_e n_e} + \frac{\nabla_{\perp}^2 p_e}{m_e n_e}$$

On a :

$$\vec{P}_0 = \vec{P}_{ee} + \vec{P}_{ei} = \vec{P}_{ei} = n_e m_e \langle \langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei} \rangle$$

($\vec{P}_{ee} = \vec{P}_{ii} = 0$, $\vec{P}_e = -\vec{P}_i$: à cause de la conservation du la quantité de mouvement).

$\langle \langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei} \rangle$ est calculé, dans l'appendice 2.2 (pour $T_i \neq T_e$, et des vitesses de drift $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$ d'intensités quelconques - sans faire l'hypothèse, usuelle, que des vitesses sont petites devant les vitesses d'agitation thermiques, $v_e = (kT_e/m_e)^{1/2}$ et $v_i = (kT_i/m_i)^{1/2}$). On trouve (cf. appendice 2.2) :

$$\langle \langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei} \rangle = \frac{\sqrt{2} (1/m_e + 1/m_i) T_e m_e}{3\sqrt{\pi} (\vec{v}_e^2 + \vec{v}_i^2)^{3/2}} (\vec{v}_e - \vec{v}_i) e^{-\frac{(\vec{v}_e - \vec{v}_i)^2}{2\vec{v}_e^2}} g\left(\frac{\vec{v}_e}{\vec{v}_e} \left| \frac{\vec{v}_e - \vec{v}_i}{\vec{v}_e} \right|, \frac{\vec{v}_i}{\vec{v}_e}\right) \quad (5)$$

où : $g(x, y)$ est définie par :

$$g(x, y) = \frac{2y^2(1+y^2)^{3/2}}{2^3} \int_0^{\infty} e^{-y^2 t^2} G\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right) [\operatorname{sh} xt - xt \operatorname{ch} xt] dt$$

En fait, on a : $\langle \dots \rangle$ désignant maintenant la moyenne sur la distribution des vitesses (uniques) :

$$\langle \langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei} \rangle = 0$$

$$\langle \langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei} \rangle = \langle \langle \Delta \vec{w} \rangle_{ei} \rangle = \frac{\sqrt{2} (1/m_e + 1/m_i) T_e m_e}{3\sqrt{\pi} (\vec{v}_e^2 + \vec{v}_i^2)^{3/2}} (\vec{v}_e - \vec{v}_i) e^{-\frac{(\vec{v}_e - \vec{v}_i)^2}{2\vec{v}_e^2}} g\left(\frac{\vec{v}_e}{\vec{v}_e} \left| \frac{\vec{v}_e - \vec{v}_i}{\vec{v}_e} \right|, \frac{\vec{v}_i}{\vec{v}_e}\right)$$

Les coefficients $\bar{P}_e$ et $\bar{P}_i$ en résultent. Sous leurs formes générales, données en (5), (6), (7), ces coefficients permettent d'écrire de façon concise, en des symboles on écrit $\bar{P}_e$ et $\bar{P}_i$ en fonction des vitesses d'agitation thermique v_e et v_i , électronique et ionique. ^(*)

Dans les divers problèmes pratiques qu'on étudiera aux chapitres suivants, on aura souvent :

$$v_i \ll v_e$$

$$\text{ou } |\vec{v}_i - \vec{v}_e| \ll (v_e, v_i)$$

Il est alors intéressant de développer les développements de $\bar{P}_e$ et $\bar{P}_i$ au voisinage de $|\vec{v}_i - \vec{v}_e|/v_{e,i} = 0$

On a (cf. appendice 2.2) :

$$= \frac{\sqrt{m_i} (1/m_i + 1/m_e) \Gamma_e n_e n_i}{2\sqrt{\pi} (v_e^2 + v_i^2)^{3/2}} (\vec{v}_i - \vec{v}_e) \left[1 - \frac{3}{2(v_e^2 + v_i^2)} (\vec{v}_i - \vec{v}_e)^2 + \frac{5}{8\pi(v_e^2 + v_i^2)^2} (\vec{v}_i - \vec{v}_e)^4 \right]$$

ou, en remplaçant Γ_e par son expression $e^4 n_e \Lambda / 4\pi \epsilon_0^2 m_e^2$

$$= \frac{\pi (1/m_i + 1/m_e) n_e n_i e^4 \Lambda}{2\sqrt{\pi} \epsilon_0^2 (v_e^2 + v_i^2)^{3/2}} (\vec{v}_i - \vec{v}_e) \left[1 - \frac{3}{2(v_e^2 + v_i^2)} (\vec{v}_i - \vec{v}_e)^2 + \frac{5}{8\pi(v_e^2 + v_i^2)^2} (\vec{v}_i - \vec{v}_e)^4 \right]$$

expression symétrique par rapport aux indices e et i . En fait à part la forme $\vec{v}_i - \vec{v}_e$, on a donc bien $\bar{P}_e = -\bar{P}_i$

(*) Cette note a été rédigée au début du mois d'août 1964, au moment

/ quantité de mouvement (par unité de volume) des électrons par rapport aux ions :

$$= \frac{\vec{P}_e}{n_i n_e (\vec{v}_e - \vec{v}_i)}$$

De (7), on déduit pour ν l'expression :

$$\begin{aligned} \nu &= \frac{\sqrt{2} e^4 (1/n_i + 1/n_e) n_i \ln \Lambda}{12 \pi^{3/2} e^2 m_e (\tau_e^2 + \tau_i^2)^{3/2}} \approx \frac{\sqrt{2} e^4 n_i \ln \Lambda}{12 \pi^{3/2} e^2 m_e^2 (\tau_e^2 + \tau_i^2)^{3/2}} \\ &= \frac{\sqrt{2} e^4 n_i \ln \Lambda}{12 \pi^{3/2} e^2 m_e^2 (kT_e/m_e + kT_i/m_i)^{3/2}} \end{aligned} \quad (8)$$

soit numériquement :

$$\nu = 3,63 \times 10^{-6} \frac{n_i \ln \Lambda}{(T_e + \frac{m_e}{m_i} T_i)^{3/2}} \quad (x)$$

Il est intéressant de comparer ν à la fréquence moyenne des collisions electron-ion définie en 2.2.2. et dont l'expression tirée de (2.7) est :

$$\nu_{ei} = \frac{\sqrt{2} e^4 n_i \ln \Lambda}{4 \pi^{3/2} e^2 m_e^2 (\tau_e^2 + \tau_i^2)^{3/2}} \ln \left(\frac{\tau_e}{\tau_i} \right)$$

soit :

$$\nu_{ei} = \nu \frac{\ln(\tau_e/\tau_i)}{\ln(\tau_e/\tau_i)}$$

La figure 12 représente les variations de $\langle \frac{V}{v} \rangle$ en fonction de T_e/T_i . On voit que ces deux déficits de la fréquence moyenne des collisions électron-ion conduisent à des valeurs qui, dans l'intervalle intéressant $10^{-4} < T_e/T_i < 10^2$, diffèrent au plus d'un ordre de grandeur.

Cette convergence, quelque que grossière autorise à parler de fréquence de collision tout court.

En introduisant ν , les équations de transport de la quantité de mouvement électronique et ionique s'écrivent :

$$m_e n_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -en_e \mathbf{E} - \nabla p_e + \mathbf{J} \times \mathbf{B} - m_e n_e \nu \mathbf{v}_e$$

$$m_i n_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = en_i \mathbf{E} - \nabla p_i - m_i n_i \nu \mathbf{v}_i$$

$$\frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} + \mathbf{v}_e \cdot \nabla \mathbf{v}_e = -\frac{en_e}{m_e} \mathbf{E} - \frac{1}{m_e} \nabla p_e + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{m_e} - \nu \mathbf{v}_e$$

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} + \mathbf{v}_i \cdot \nabla \mathbf{v}_i = \frac{en_i}{m_i} \mathbf{E} - \frac{1}{m_i} \nabla p_i - \nu \mathbf{v}_i$$

2.3.4.- Résistivité électrique.

Quand, dans un milieu matériel parcouru par des courants, on a en chaque point une proportionnalité entre la densité de courant $\mathbf{J}$ et le champ électrique $\mathbf{E}$:

on dit que le milieu est ohmique : la constante de conductivité σ (tensorielle en général, scalaire dans les milieux isotropes) est constante. La conductivité, $[\sigma]^{-1} = \eta$, résistivité. Les métaux sont approximativement ohmiques. Si champ électrique et courant sont variables dans le temps et si dans une certaine bande de fréquence $\omega/\nu \ll 1$, on a

$$\vec{J}_\omega(\vec{k}) = \sigma_\omega(\vec{k}) \cdot \vec{E}_\omega(\vec{k})$$

où $\vec{E}_\omega(\vec{k})$ et $\vec{J}_\omega(\vec{k})$ désignent les transformées de Fourier dans le temps de $\vec{E}$ et $\vec{J}$, on dit encore que le milieu est ohmique, dans la bande de fréquence envisagée. La conductivité $\sigma_\omega(\vec{k})$ est alors une fonction de ω et $\vec{k}$.

Les équations de transport précédentes permettent d'établir la relation qui existe dans un plasma complètement ionisé, entre densité de courant $\vec{J}$ et champ électrique $\vec{E}$, dans de certaines conditions.

Envisageons d'abord le cas le plus simple d'un plasma homogène soumis en régime permanent et en l'absence de tout champ magnétique, à un champ électrique extérieur $\vec{E}$ "faible" (on précisera plus loin ce terme), entraînant des vitesses de dérive électronique $\vec{v}_e$ et ionique $\vec{v}_i$ suffisamment petites (devant les vitesses d'agitation thermique) pour qu'on puisse ne garder que les termes d'ordre 1 en $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$, dans les équations de transport de la quantité de mouvement. Celles-ci se réduisent alors à :

$$n_e e \vec{E} = n_i m_i \nu (\vec{v}_i - \vec{v}_e) = - m_e \nu \frac{\vec{J}}{e}$$

d'où :

$$\vec{J} = (n_e^2 / m_e \nu) \vec{E}$$

Dans ces conditions le plasma est donc ohmique, avec une résistivité :

$$\eta = m_e \nu / n e^2 = \nu / \varepsilon_0 \omega_p^2$$

ou, en remplaçant ν par son expression (8) :

$$\eta = \frac{\sqrt{2} e^2 (1/m_e + 1/m_i) \ln \Lambda}{2 \pi^{3/2} \varepsilon_0^2 (kT_e/m_e + kT_i/m_i)^{3/2}} \quad (11)$$

$$= 129 \frac{\ln \Lambda}{(T_e + \frac{m_e}{m_i} T_i)^{3/2}}$$

expression qui généralise (en cas $T_e \neq T_i$) celles données par Spitzer [5] [6] ($T_e = T_i$), et par Rosenbluth [7] ($T_e \neq T_i$, mais $T_i \neq T_e$).

Cette formule de résistivité est liée à l'expression (5) de la fréquence moyenne de collision, et donc, se rattache à un type très particulier de distribution des vitesses, la distribution maxwellienne canonique. En fait, les vitesses de dérive étant beaucoup petites (c'est-à-dire petites devant les vitesses d'agitation thermique), la relation entre $\vec{v}$ et $\vec{v}'$ dépend avec peu des distributions de vitesses adoptées pour le calcul. Utilisant la méthode de Chapman et Cowling (dans laquelle la fonction f de distribution des vitesses est prise de la forme $f = f^{(0)} + f^{(1)}$, où $f^{(0)}$ est la distribution maxwellienne et $f^{(1)}$ une perturbation), Spitzer trouve (dans le cas $T_e = T_i$) une expression de η qui diffère de (11) par un coefficient numérique voisin de 2.

Il est évident que ces résultats sont assez bien (pour les champs électriques faibles), la dépendance de η vis à vis de la température électronique, et l'ordre de grandeur de la résistivité données par les expressions de Spitzer ou de Braginskij (ou par (11)) [5]. Elle ne permet pas encore de dériver des formules différant par un facteur $\rho^{(x)}$.

Envisageons maintenant une colonne de plasma soumise à un champ magnétique constant H_0 appliqué au long de l'axe Oz . Les ions dérivent radialement (à travers les lignes de force magnétiques, Fig. 1 d) avec la même vitesse $\vec{v}_i = -\eta \{ \frac{1}{2} (\nabla \cdot \nabla) / r \} (dn/dr) \vec{e}_r$ (η étant la résistivité ci-dessus), tandis que s'établit un courant transverse (perpendiculaire à $\vec{e}_z$ et $\vec{e}_r$), de densité

$$j = \frac{1}{4\pi} \nabla \times \nabla \times \vec{A}$$

...

(x) Lorsque le champ électrique appliqué est suffisamment intense pour que les vitesses de dérive ne soient plus petites devant les vitesses d'agitation thermiques, l'effet "runaway" apparaît. L'ordre de grandeur du champ électrique critique est $E_c \approx 10^6$ V/cm, ainsi que les effets de faisceaux multiples qui lui sont liés (Buneman, 9). La relation ci-dessus entre η et n n'est plus valable. Les phénomènes, très complexes dont le plasma est alors le siège n'ont pas encore été décrits de manière pleinement satisfaisante.

Signalons également que, vis à vis des champs variables (dans le temps), même faible, un plasma complètement ionisé n'est pas, en général, tel que : la relation (11) doit être remplacée [10] par (12) de Drummond et al. [11] ont explicité la conductivité dans quelques cas assez généraux.

Dans un référentiel (R') entraîné à la vitesse de dérive d'ensemble du plasma, on a donc, entre le champ électrique

$$\vec{E}' = \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} = \eta [4(\gamma_e + \gamma_i) / \sigma] (dn/dn) \vec{E}_0$$

et la densité de courant $\vec{J}' = \vec{J}$ ($n_e = n_i$), la relation :

$$\vec{J}' = (1/\eta) \vec{E}'$$

η est donc encore la résistivité dans ce cas.

L'expression (11) est elle-même adaptée à ce cas qu'en cas d'un plasma soumis à un champ électrique faible, car on verra au chapitre suivant, que dans un plasma soumis à un champ magnétique constant, les distributions de vitesses sont principalement de type Maxwellien axé sur l'axe qui a servi à obtenir l'expression (11) de η . C'est pourquoi on désignera désormais cette expression par résistivité transversale (au champ magnétique). Si on fait $T_e = T_i$ dans (11), on retrouve la résistivité transversale donnée par Spitzer [12], [6].

2.4. - CONCLUSION

Les phénomènes de refroidissement et de la diffusion d'une particule dans un plasma à ions chauds ($T_e \ll T_i$) sont assez différents de ce qu'ils sont dans les plasmas à ions froids ($T_e \approx T_i$) ou à l'équilibre thermodynamique ($T_e = T_i$). Dans ce cas-ci, par exemple, on peut voir intuitivement par les autres lois, que les vitesses des électrons ne sont pas reliées à celles des ions de la même manière qu'elles le sont dans les plasmas à ions froids, ou, au contraire, ce sont les électrons qui interagissent avec les ions, la relation est inversée.

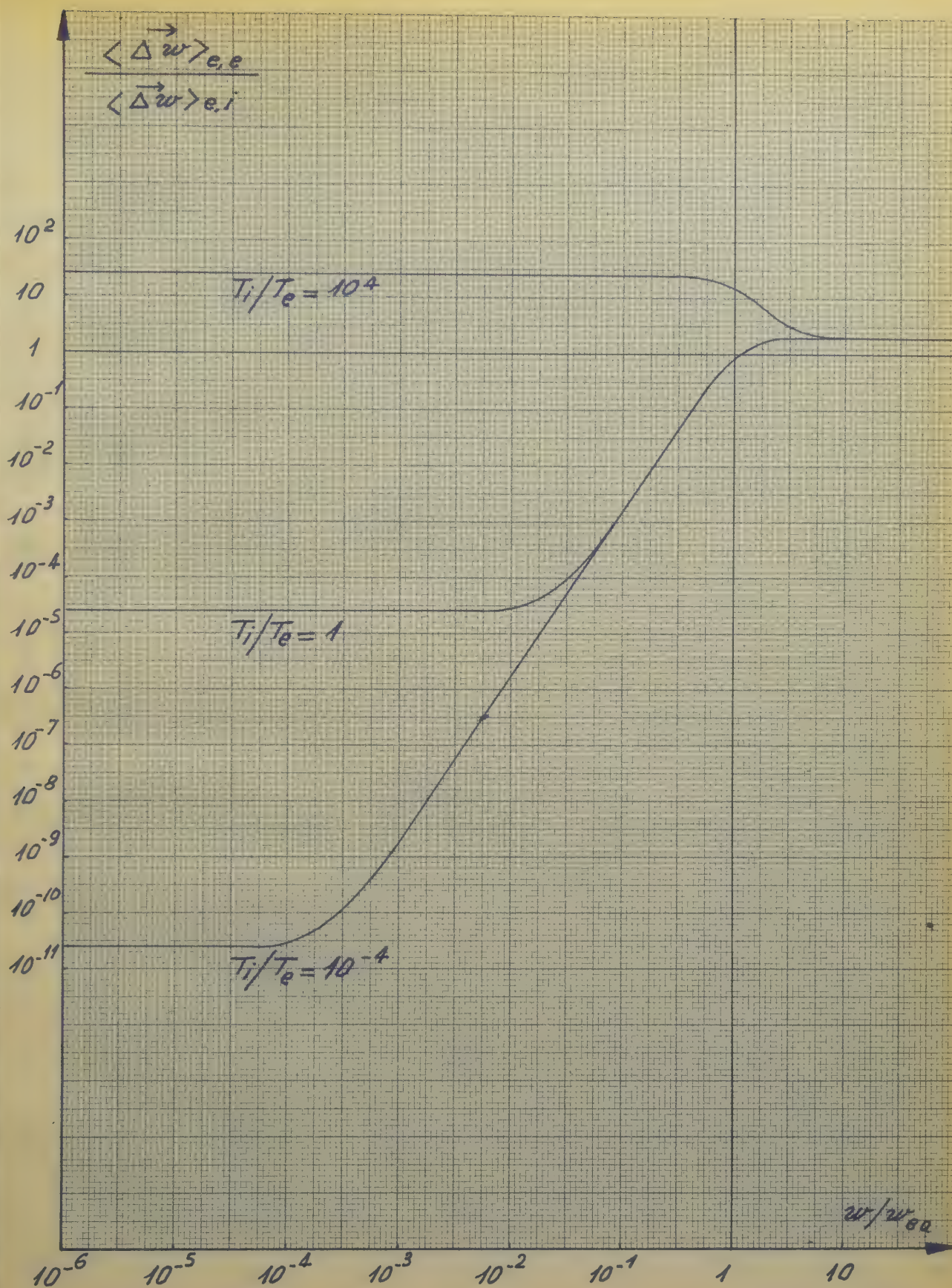
Après une étude systématique de ces phénomènes, en fonction du rapport T_i/T_e et de la vitesse w de la particule-test, on a calculé la fréquence des collisions électrons-ions, $f_e(w)$ et sa valeur moyenne $\langle f_e \rangle = \langle f_e(w) \rangle_w$.

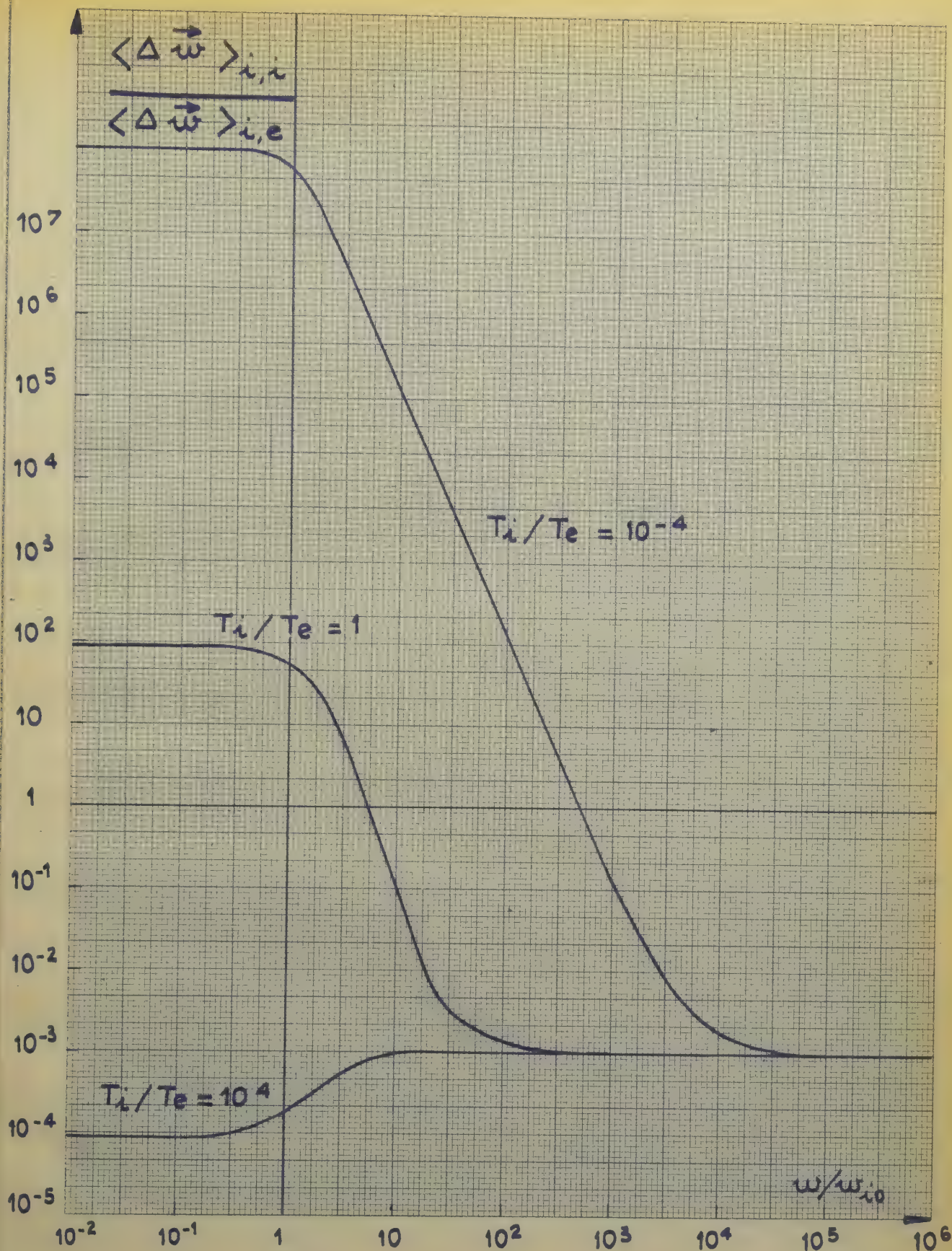
Envisageant ensuite le cas où électrons et ions ont des vitesses de dérive, on a calculé le taux d'échange de quantité de mouvement (par collisions) électrons-ions $\vec{P}_e = -\vec{P}_i$, pour $T_i \neq T_e$, et des vitesses de dérive $\vec{w}_e$ et $\vec{w}_i$ quelconques (sans faire l'hypothèse, habituelle, que ces vitesses sont petites devant les vitesses d'agitation thermique). A $\vec{P}_e = -\vec{P}_i$, on peut associer (selon la définition introduite par Delcroix) une fréquence moyenne de collisions ν , qu'on a comparé à $\langle f_e \rangle$. Entre $T_i/T_e = 10^{-4}$ et $T_i/T_e = 10^4$, $\langle f_e \rangle$ et ν diffèrent au maximum d'un ordre de grandeur, ce qui autorise à parler de fréquence moyenne de collision, sans plus préciser

On a établi enfin une expression de la résistivité électrique d'un plasma (complètement ionisé) qui généralise au cas $T_i \neq T_e$, avec éventuellement $T_i \gg T_e$, celles données par Spitzer ($T_i = T_e = T$) et par Braginskij ($T_i \neq T_e$, mais $T_i \gg T_e$).

2.- BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. CHANDRASEKHAR : in "Principles of stellar dynamics". 89, University of Chicago Press, CHICAGO (1942).
- [2] S. CHANDRASEKHAR : Astrophys. J., 97, 255 (1943).
- [3] J.M. DOLIQUE : Comptes rendus Ac. Sc., 251, 1163 (1960).
- [4] L. SPITZER, R. HÄRM : Phys. Rev., 89, 977 (1953).
- [5] J.L. DELCROIX : in "Introduction à la théorie des gaz ionisés", Dunod, PARIS (1960).
- [6] L. SPITZER : in "Physics of Fully Ionized Gases" Internat. Publ. NEW YORK (1956).
- [7] S.Y. BRAGINSKIY : in "Fizika plazmy i problema termojaderniky upravljajemykh reaktsii", Vol. 1, edit. Leont'yev, MOSCOW (1958).
- [8] J. DUHANT - Conférence sur la physique des plasmas et la recherche actuelle sur la fusion nucléaire contrôlée, BALDRECH (1961) CN-10/10.
- [9] O. RUFENACH : Phys. Rev., 115, 603 (1959).
- [10] G.E.H. REITER, S.H. SCHWARTZ : Phys. Rev. 104, 104 (1956).
- [11] G.E. DRUMMOND, R.E. JERNIN, S.G. SCHWARTZ : Jour. Nucl. Energy Part C, 1, 100 (1961).
- [12] L. SPITZER : Astrophys. J., 115, 200 (1952).





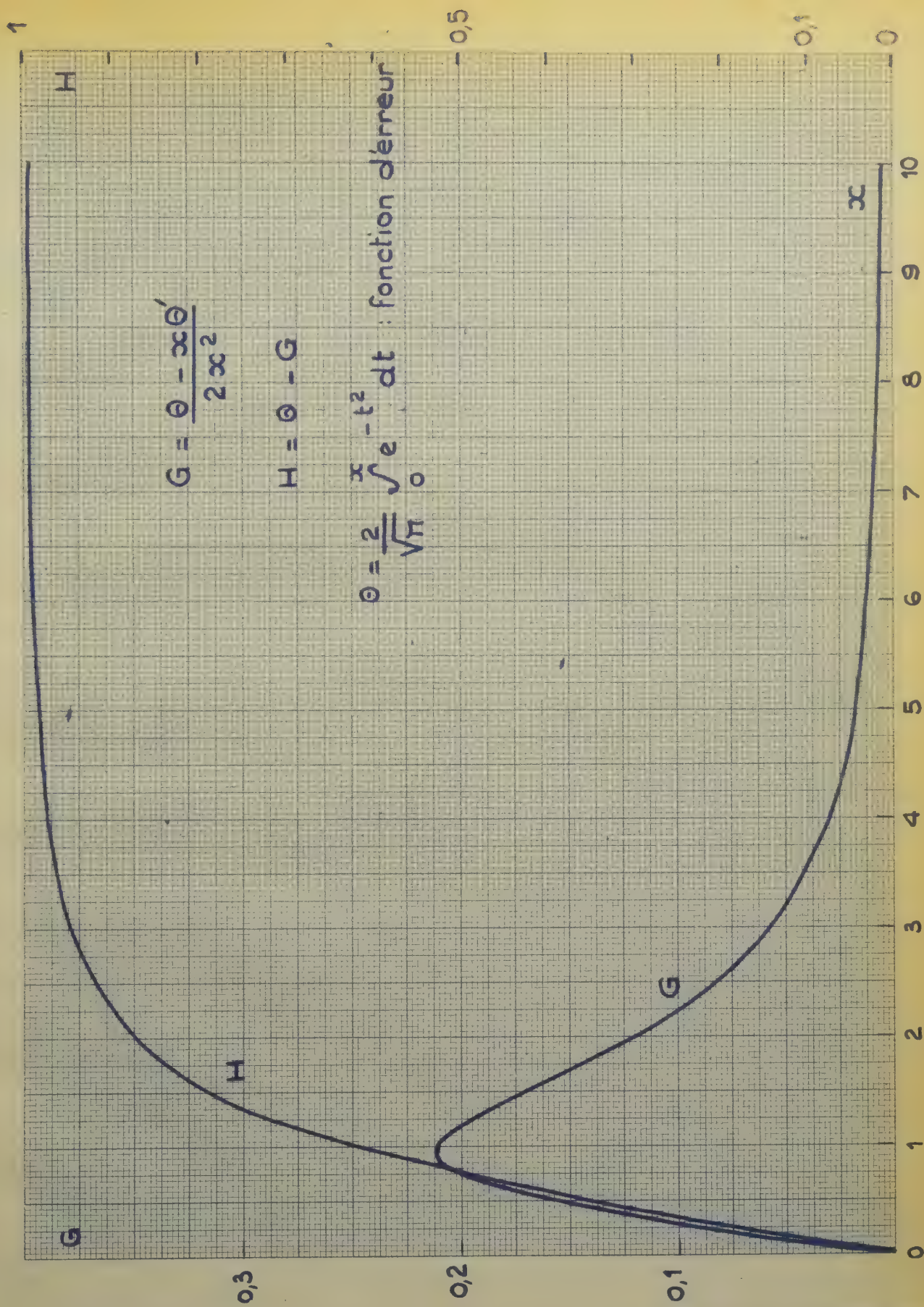
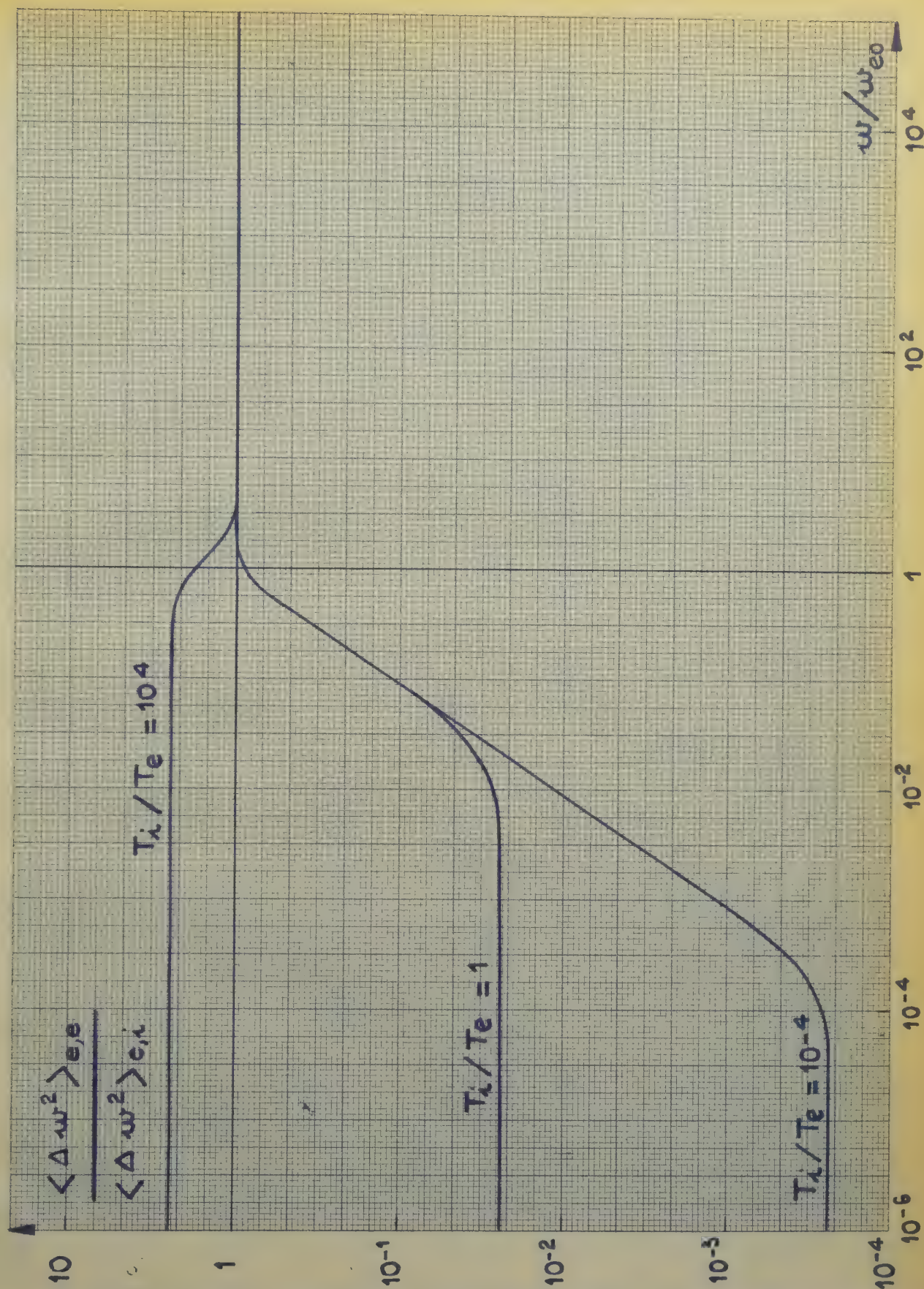
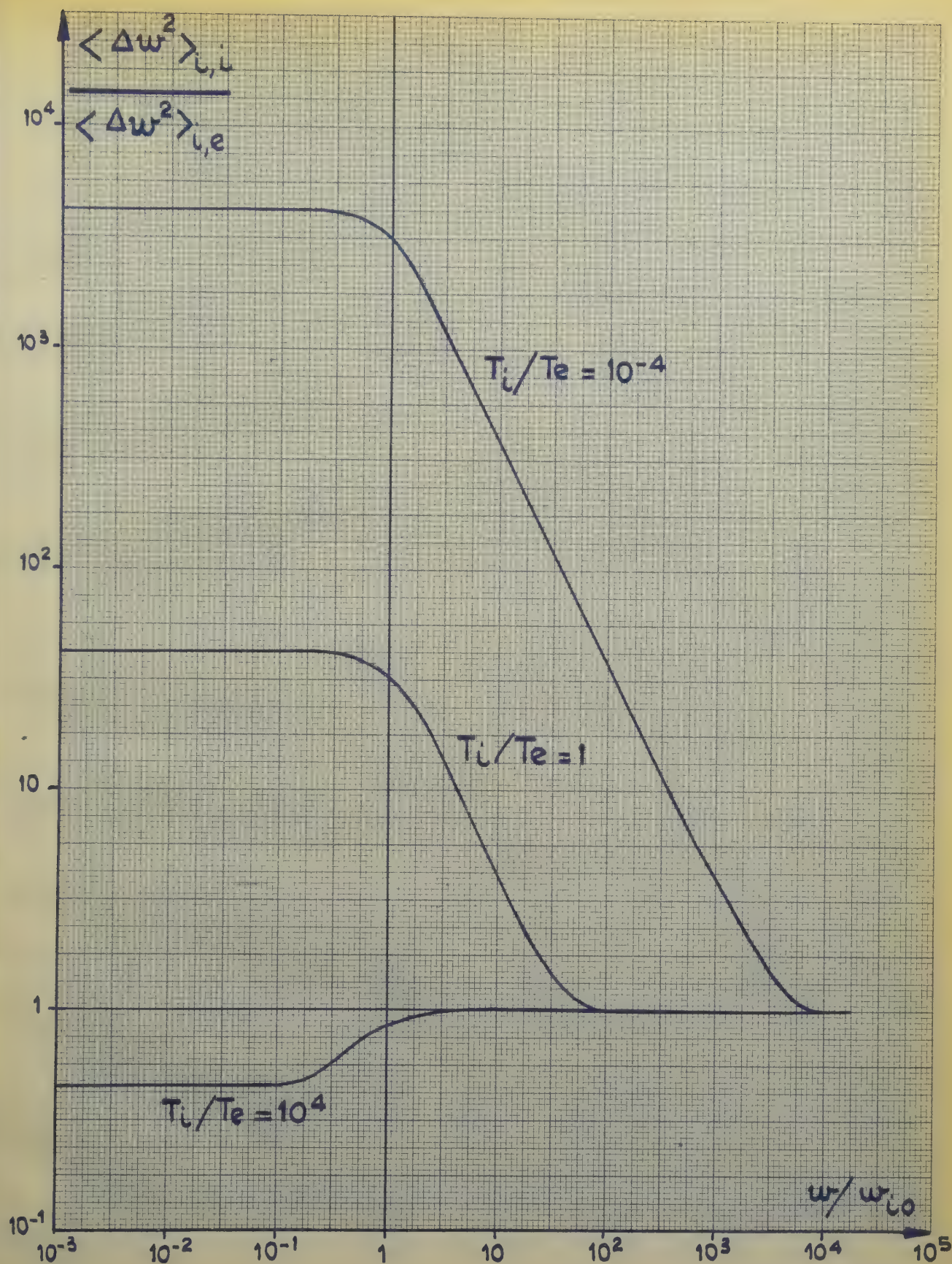
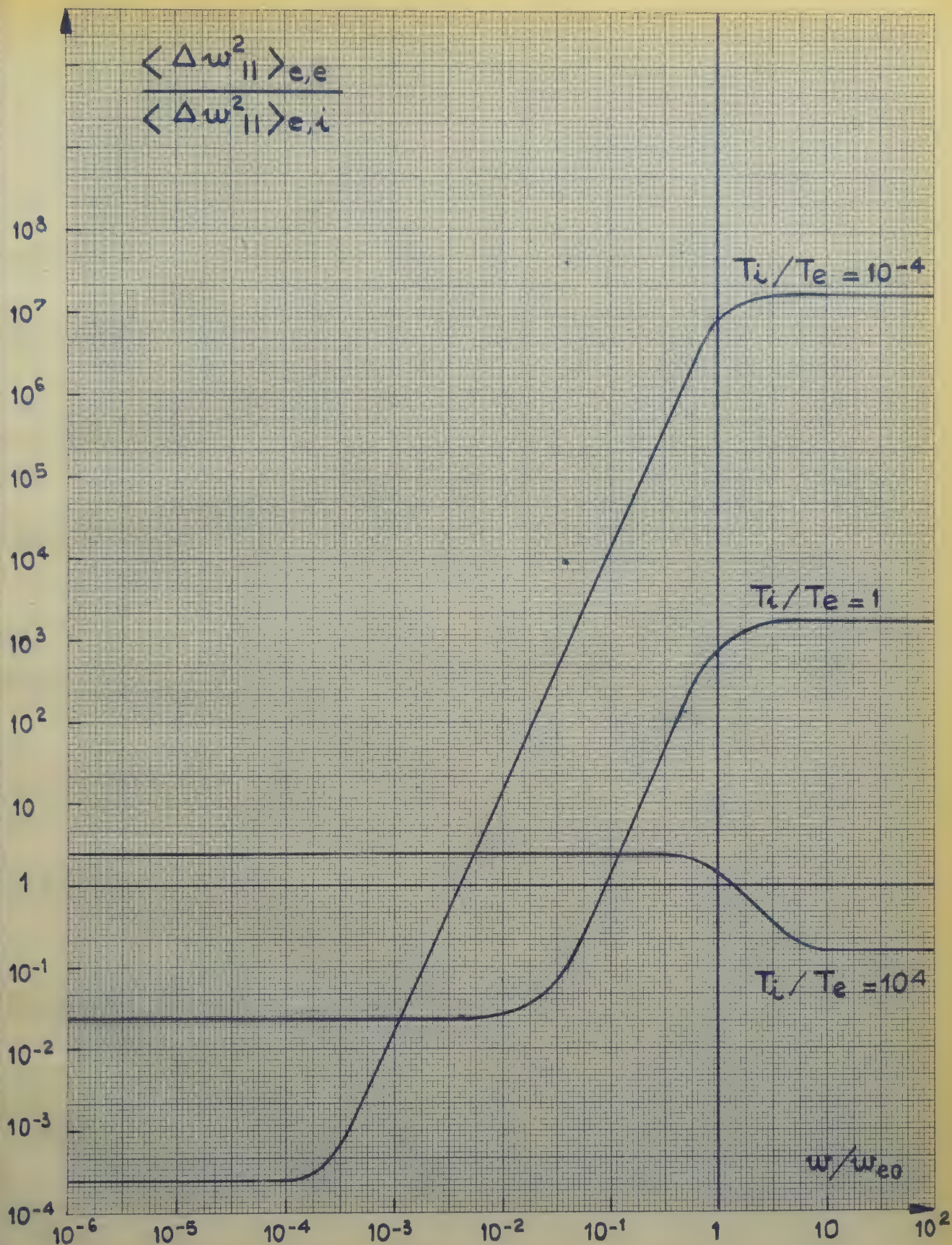
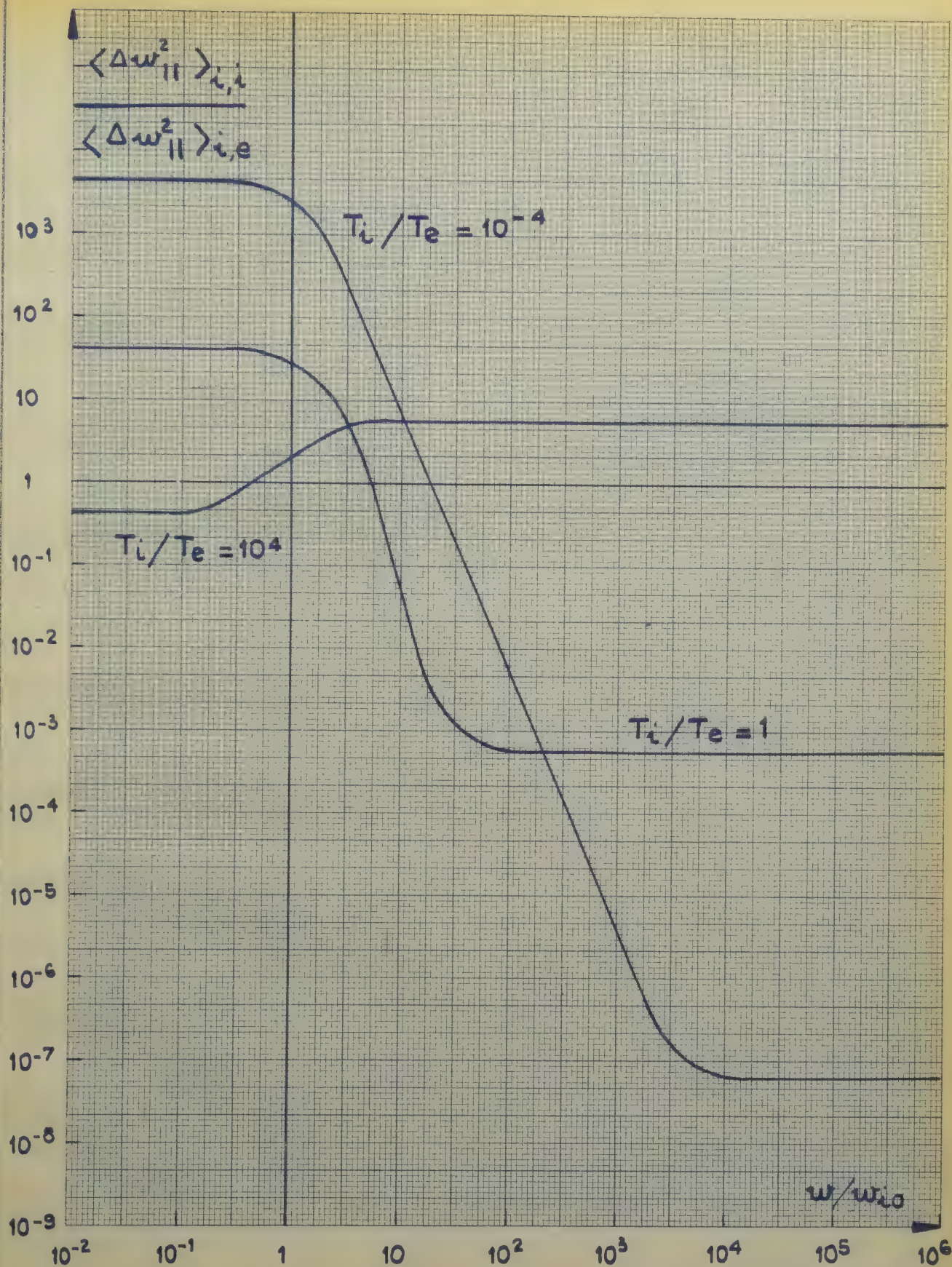


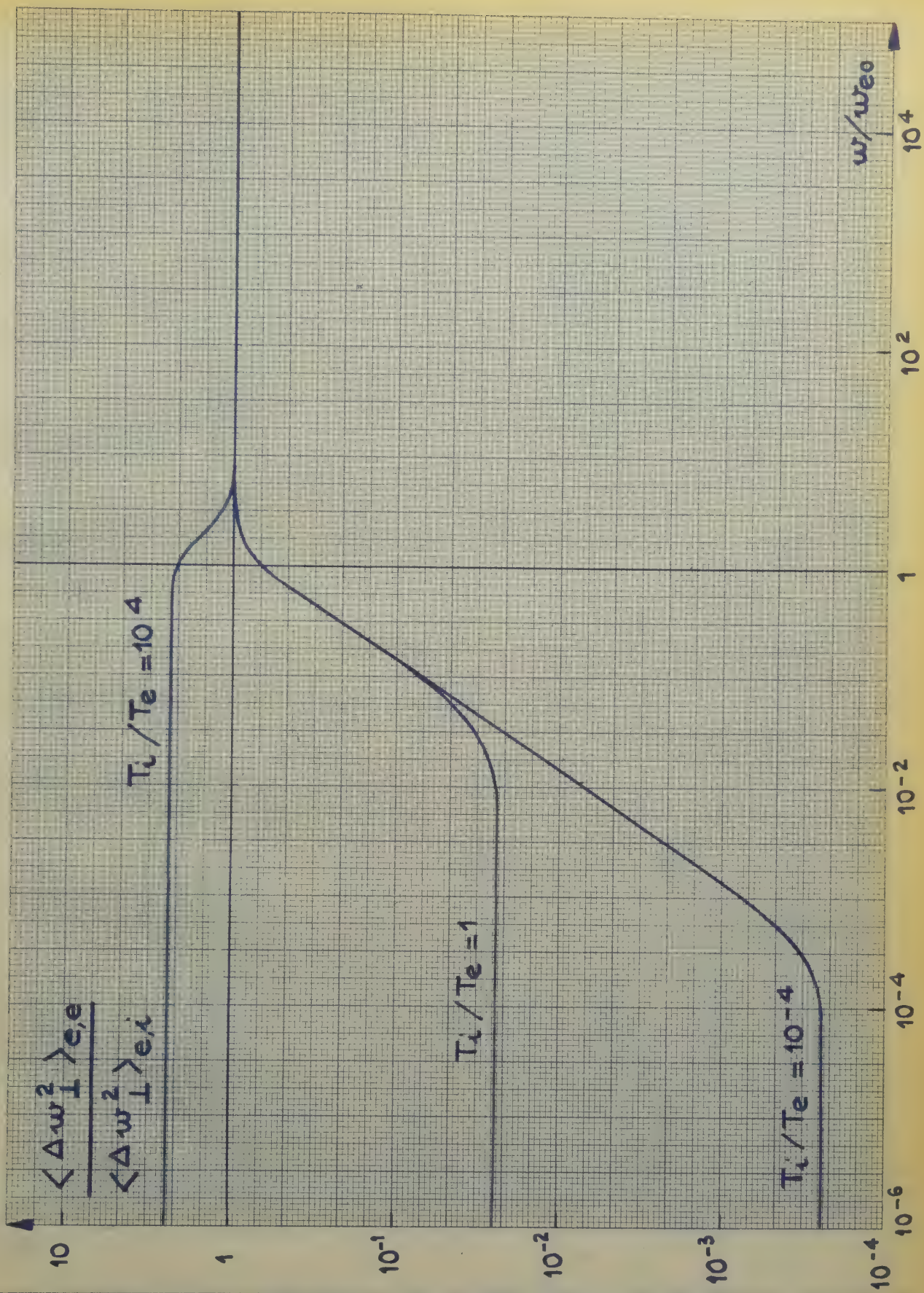
Fig. 3

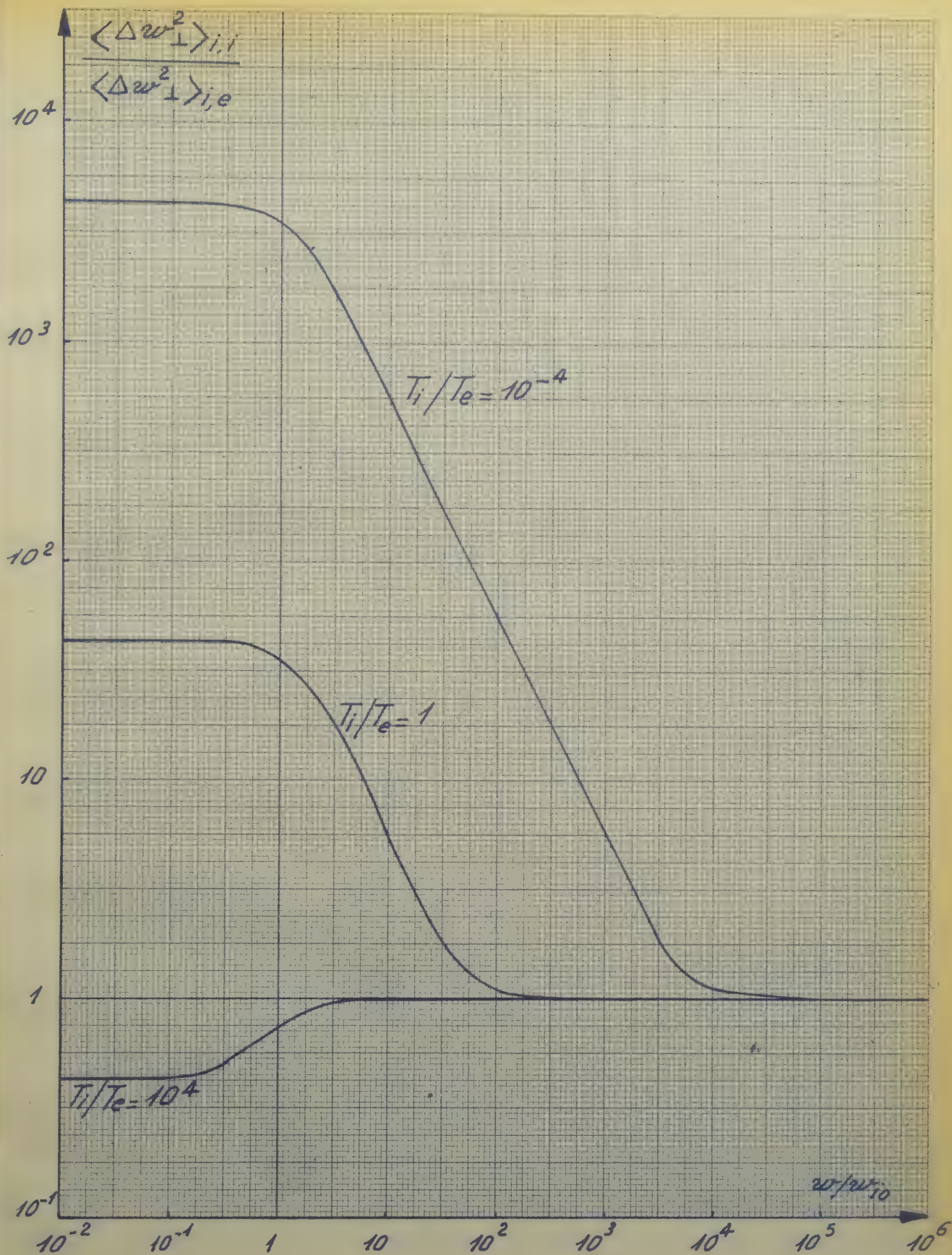


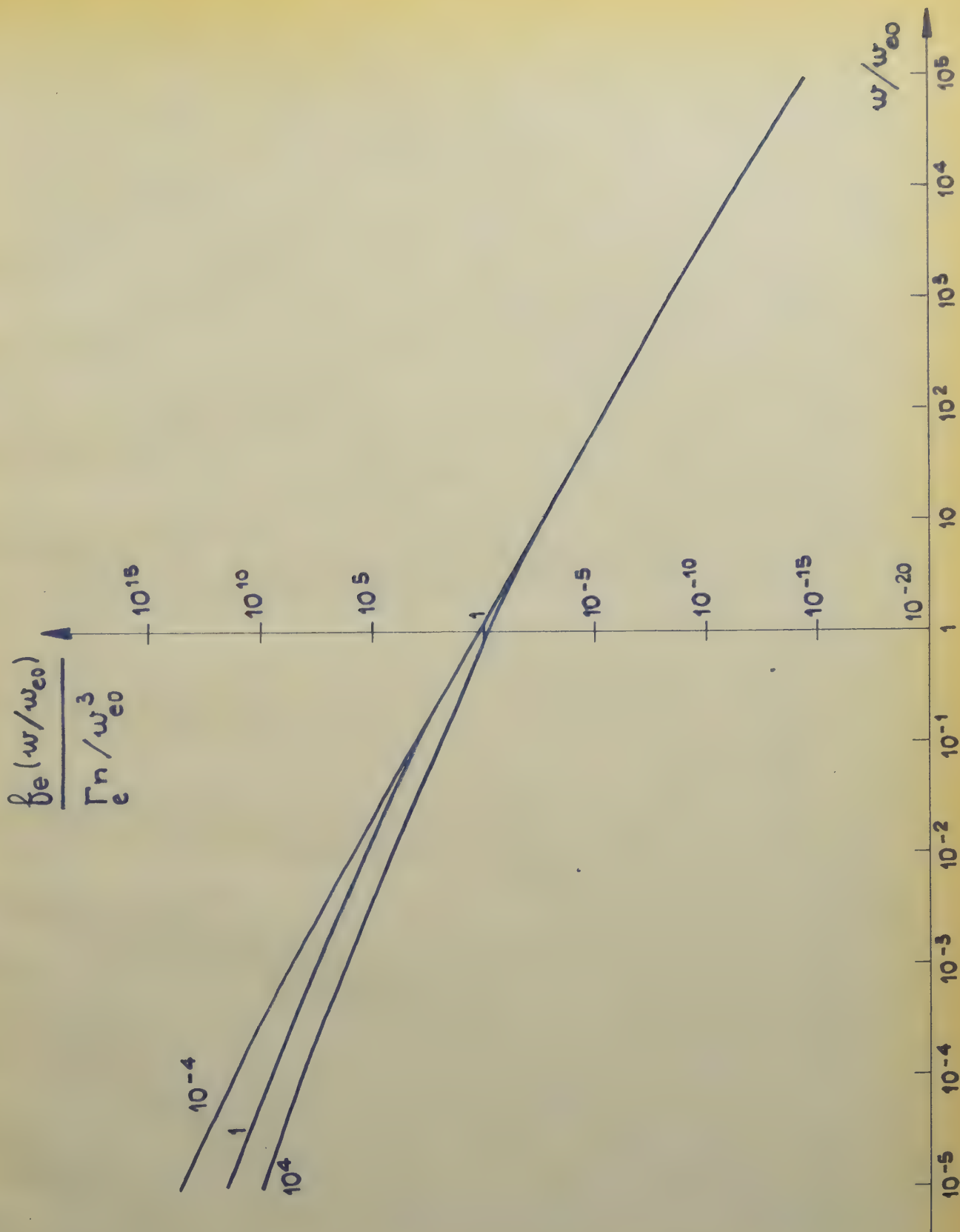












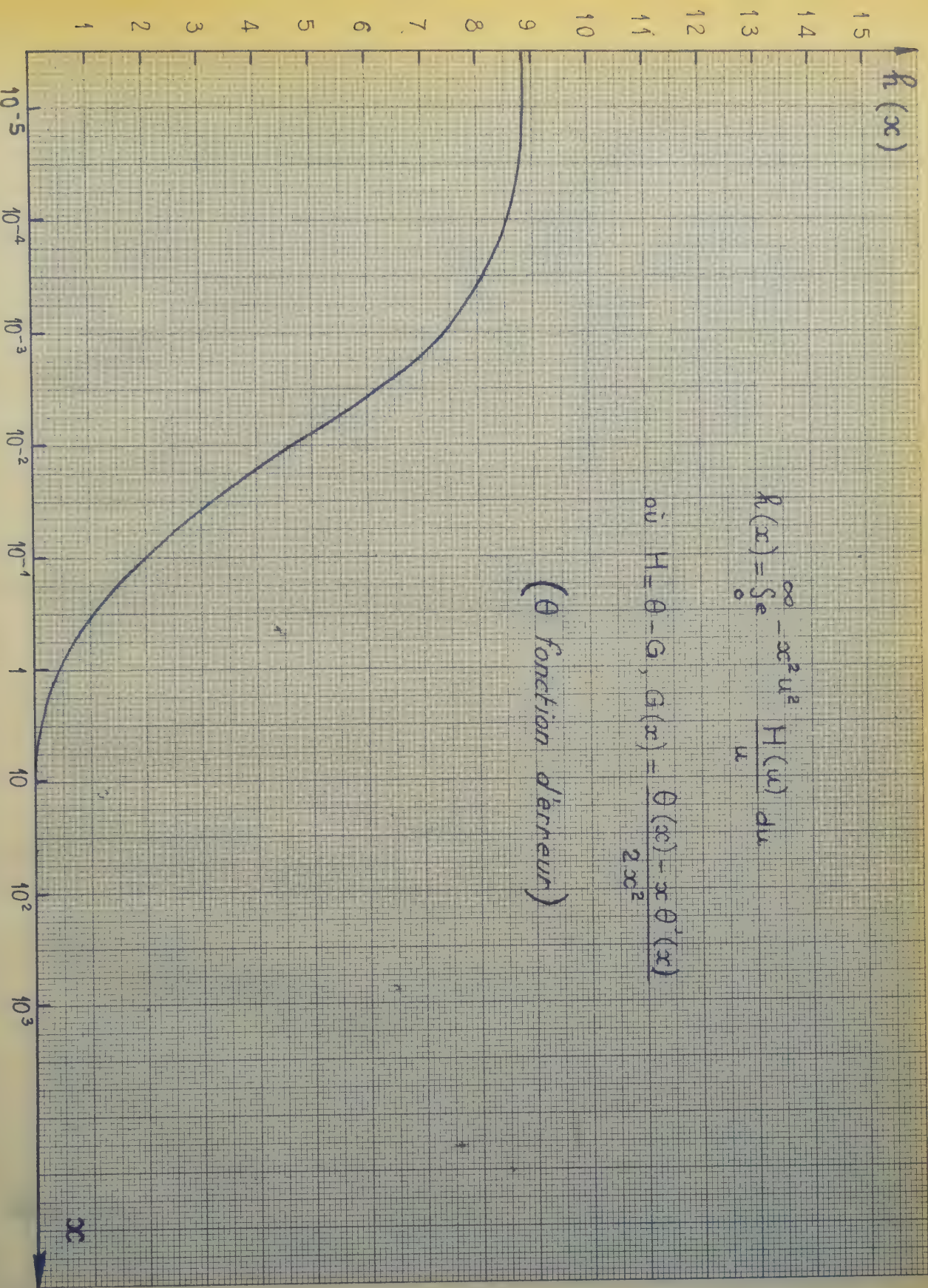
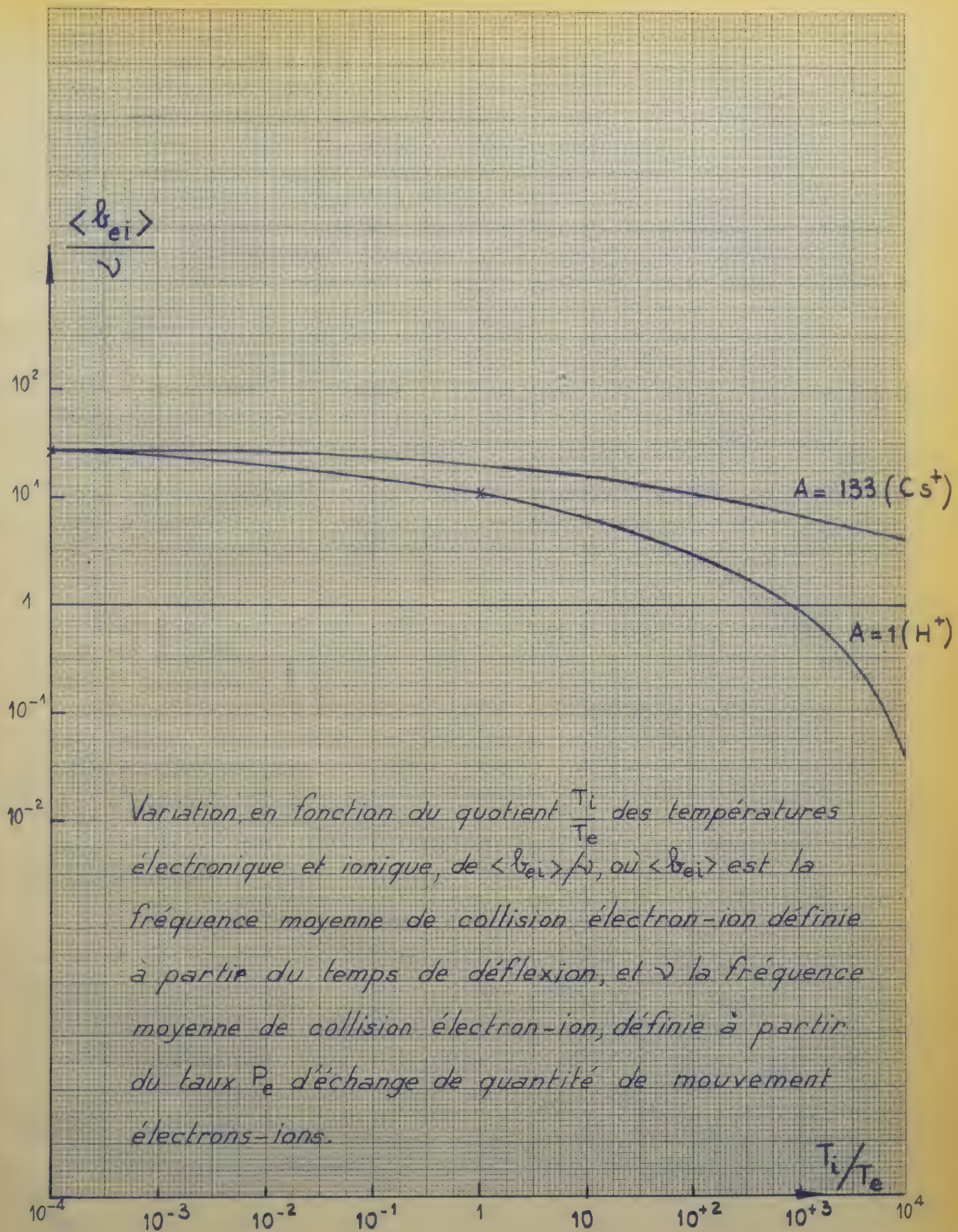


Fig: 11



2.- CONFINEMENT DES PARTICULES DANS UNE BOUTEILLE MAGNETIQUE, LORSQUE NE S'OPÈRE NI LE FUSION A HAUTE TEMPERATURE NI L'INJECTION DE PARTICULES

2.1 - INTRODUCTION

Dans toutes les expériences où on a cherché à confiner, à l'aide d'un champ magnétique, une masse de plasma chaud et dense - afin d'y observer des réactions de fusion nucléaire - la plasma a été le siège d'instabilités qui ont limité la durée de confinement à quelques secondes au maximum. Ces instabilités, dont la manifestation collective dépendent, entre autres autres, de la géométrie du champ magnétique de confinement. Une des tâches actuelles les plus importantes de la recherche sur la fusion nucléaire contrôlée, est l'étude des divers types d'instabilités et la réalisation d'une carte de champ magnétique telle que celles-ci soient supprimées, ou très réduites.

Parmi elles la moins, si on le veut, en observant à l'extérieur, trois types de pertes : a) en volume, b) par éjection des particules le long des lignes de force magnétiques (pertes par les "goulets" de la bouteille magnétique - la figure 1 représente le schéma de principe d'une telle bouteille) et c) par diffusion des particules à travers les lignes de force magnétiques (pertes par les "parois" de la bouteille).

Le plus important mécanisme de pertes en volume est l'échappement de charges à un ion de grande énergie, entrant en collision avec une particule neutre de faible énergie appartenant au gaz résiduel. Échange de charge avec celui-ci, on obtient ainsi une particule neutre de grande énergie, qui n'est plus confinée, et un ion de faible énergie sans intérêt pour la fusion nucléaire. Pour diminuer les pertes de ce type, il faut réduire au maximum la pression de gaz résiduel et injecter des ions d'énergie suffisamment grande pour que la section efficace d'échange de charge soit faible (cette section efficace passe par un maximum en fonction de l'énergie).

3.4

On verra plus loin que, dans le cas $T_i \gg T_e$, on a encore les mêmes expressions de ψ , mais avec le n_i établi au § 2.3.4.

Le calcul de la distribution de densité $n(\vec{r})$ résultant de la distribution à l'équilibre des lignes de forces magnétiques, a été fait par Taniuti et Zangwill [10] dans le cas particulier d'un plasma à une température ($T_i = T_e = T$) occupant un demi-espace ($z > 0$), en présence d'un champ magnétique parallèle au plan xy et d'un champ électrique E parallèle à l'axe z . Ce calcul ne est négligé.

On va étudier ici une situation différente, plus proche des conditions de fonctionnement d'une machine à réacteur. On envisage une région cylindrique de plasma, limitée radialement par une paroi matérielle (une tige métallique), à deux températures ($T_i \neq T_e$). L'introduction de distributions variables de densité en évidence l'existence de plusieurs régimes de confinement (en fonction de l'intensité du champ magnétique).

3.2. - HYPOTHESES - BASE EN PARTICULIER.

3.2.1. - Hypothèses.

Malgré on laisse de côté les mécanismes de dérive autres que la dérive à travers les lignes de force magnétiques, pour se limiter à l'intégration qu'à ce dernier, on va considérer une bouteille magnétique idéalisée, ayant la géométrie la plus simple : celle du cylindre de révolution matériel (figure 2), à l'intérieur d'un volume cylindrique (rayon R), limité par une paroi matérielle. On crée, à l'aide de bobines extérieures, un champ magnétique qui, en l'absence de plasma, est uniforme et parallèle à l'axe de la bobine ($\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$). On suppose que l'induction continue, destinée à contenir la partie des particules à travers les lignes de force magnétiques se traduit par l'application à l'intérieur du cylindre, soit sur Oz , d'un champ $B_0 \leq B_c$, de B_c dans la zone morte, soit de charge $+e$ et de $-e$ électrons, par ailleurs, par exemple, d'un champ électrique

On suppose que les milieux considérés satisfont les équations de transport de Fokker-Planck, pour de certaines valeurs de $\frac{1}{T_e}$ et de $\frac{1}{T_i}$, qui seront les vitesses de dérive en présence d'un champ magnétique.

On suppose que les ions et les électrons ont la même température T_i (ou T_e) en tous les points du plasma^(*). On s'utilisera donc que les équations de transport d'ordre 2 (équations de continuité) et 1 (équation de transport de la quantité de mouvement), à l'exception de cette équation énergétique.

On utilise des coordonnées cylindriques h, θ, z autour de Oz , axe de la bouteille indéfinie, avec $\partial/\partial\theta = \partial/\partial z = 0$.

On suppose enfin que le plasma est complètement ionisé, et neutre électriquement $n_e(h) \equiv n_i(h) \equiv n(h)$. On suppose en particulier que le champ électrique est partout nul.

Mentionnons d'abord qu'en présence du champ magnétique de confinement il n'y a d'équilibre thermodynamique possible ni pour le plasma, ni séparément pour les ions et pour les électrons, c'est-à-dire que les distributions de vitesses électrostatiques et magnétiques ne peuvent être Maxwelliennes, que les températures T_e et T_i soient égales ou non.

Si les distributions étaient Maxwelliennes, les équations de transport de la quantité de mouvement (cf. § 2.2.4) s'écritraient en effet :

$$kT_e \frac{dn}{dh} = 0 \quad kT_i \frac{dn}{dh} = 0$$

ce qui n'est possible que pour un plasma (homogène) occupant tout l'espace.

(*) On a vu plus haut l'influence du gradient de température sur la vitesse de diffusion. Zehrfeld et Kline (17) étudient la distribution de température $T(h)$ dans un plasma confiné par un champ magnétique, ont montré que T est approximativement constant, sauf à la périphérie du plasma où il existe un "cœur" de température. On suppose qu'en ce domaine ici n'est pas valable (cf. 3.4.5), dans la zone frontalière du plasma. Il est donc légitime de considérer T_i et T_e comme uniformes.

On va essayer maintenant la distribution de vitesses la plus simple après la distribution Maxwellienne : la distribution Maxwellienne axée, ^(x) c'est-à-dire Maxwellienne autour d'une vitesse moyenne $\vec{u} = \langle \vec{u} \rangle$ (cf. § 2.3)

$$\begin{aligned} \text{Prob} [v_{ex} < w_{ex} < w_{ex} + dw_{ex}, w_{ey} < w_{ey} < w_{ey} + dw_{ey}, v_{ez} < w_{ez} < w_{ez} + dw_{ez}] \\ = \frac{1}{(2\pi)^{3/2} (kT_e/m_e)^{3/2}} e^{-[\frac{1}{2}(kT_e/m_e)] [\vec{w} - \vec{u}]^2} dw_{ex} dw_{ey} dw_{ez} \end{aligned}$$

(équation analogue pour les ions avec $\vec{u}_i$ et T_i)

Et, puisque le phénomène qu'on cherche à décrire est une diffusion transverse au champ magnétique de confinement $\vec{B}$, on va faire en outre l'hypothèse :

$$v_{ez} = v_{iz} = 0$$

ce qui revient à dire qu'on suppose qu'il n'y a, le long de l'axe Oz de la bouteille magnétique, ni courant ($v_{ez} = v_{iz}$), ni dérive d'ensemble du plasma ($v_{ez} = v_{iz} = 0$)

Les équations de continuité, électronique et ionique, qui expriment la conservation du nombre des électrons et de celui des ions, s'écrivent, intégrées (en règles normales) :

Pour les électrons :

$$2\pi n_e \vec{u}_e = -\vec{u}_e \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f_e}{\partial z} dz$$

(x) Pour cette distribution, la pression est scalaire :

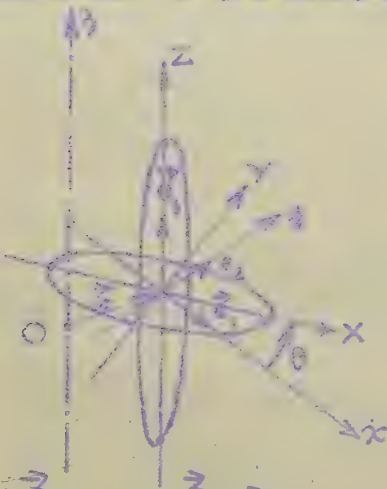
(cf. 2.3). Il serait plus satisfaisant d'envisager une pression tensorielle ayant la symétrie du champ magnétique, c'est-à-dire dont les composantes p_{ij} (dans le référentiel $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) sont des vecteurs unitaires radial, azimuthal et axial) sont

$$\langle p \rangle = \begin{pmatrix} p_{rr} & p_{r\theta} & 0 \\ p_{\theta r} & p_{\theta\theta} & 0 \\ 0 & 0 & p_{zz} \end{pmatrix}$$

ce qui conduit à remplacer la distribution normale sphérique (maxwellienne) ci-dessus, par une distribution normale ellipsoïdale :

$$f(\vec{h}, \vec{w}, t) = \frac{n(\vec{h}, t)}{(2\pi)^{3/2} \sigma_h \sigma_\theta \sigma_z \sqrt{1-\rho^2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} \left[\left(\frac{w_z - v_z}{\sigma_z} \right)^2 + \frac{1}{1-\rho^2} \left[\left(\frac{w_r - v_r}{\sigma_h} \right)^2 - \frac{2\rho(w_r - v_r)(w_\theta - v_\theta)}{\sigma_h \sigma_\theta} + \left(\frac{w_\theta - v_\theta}{\sigma_\theta} \right)^2 \right] \right] \right\}$$

centrée sur $\vec{v}$, d'écart-types $\sigma_h, \sigma_\theta, \sigma_z$ et σ_h et σ_θ étant corrélés



par ρ . (L'ellipsoïde, lieu des extrémités équiprobables de $\vec{w}$ pour une probabilité donnée

a pour centre, le point $\vec{v}$, pour axes OZ, OX et OY, OZ étant parallèle à Oz , tandis que OX et OY font avec Ox - radial - et Oy - azimuthal - un angle θ , tel que $\tan 2\theta = 2\rho\sigma_h\sigma_\theta/[\sigma_h^2 - \sigma_\theta^2]$)

Pour une telle distribution on a une variance

$$\langle \vec{w} \otimes \vec{w} \rangle = \langle (\vec{w} - \vec{v}) \otimes (\vec{w} - \vec{v}) \rangle$$

dont les composantes (sur $\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$) sont

$$\begin{pmatrix} \sigma_h^2 & \rho\sigma_h\sigma_\theta & 0 \\ \rho\sigma_h\sigma_\theta & \sigma_\theta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_z^2 \end{pmatrix}$$

et $\vec{p} = nm \vec{\mu}_2(\vec{w})$ a la forme désirée, avec :

$$p_{rr} = \sigma_h^2 nm, p_{\theta\theta} = \sigma_\theta^2 nm, p_{zz} = \sigma_z^2 nm, p_{r\theta} = p_{\theta r} = \rho\sigma_h\sigma_\theta nm$$

Nous avons développé un modèle de ce genre, avec $v_z = 0$ et

$$\sigma_h^2 = \sigma_\theta^2 = kT_\perp/m, \sigma_z^2 = kT_\parallel/m \text{ et } \rho = \rho(B) \propto B$$

Les calculs, beaucoup plus compliqués que ceux qui vont être exposés, conduisent finalement à des résultats très voisins en ce qui concerne la diffusion radiale des particules, dans le cadre des hypothèses de ce chapitre (températures données, uniformes). On fera donc l'exposé avec la fonction de distribution maxwellienne élastique, moins satisfaisante, mais plus simple et apparemment aussi efficace ici. (La distribution normale ellipsoïdale serait, par contre, très précieuse pour faire une analyse énergétique de la colonne de plasma).

3.10.

d'où

$$n v_{eh} = \frac{S_e h}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ R^2/h^2 \end{array} \right.$$

Et, pour les ions

$$n v_{ih} = \frac{S_i h}{2} \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ R^2/h^2 \end{array} \right.$$

Les équations de transport de la quantité de mouvement s'écrivent, au premier ordre en $v/(kT/m)^{1/2}$ (en supposant donc que $v \ll (kT/m)^{1/2}$; on examinera plus loin les limitations qu'entraîne cette hypothèse) (cf. 2.3.3.)

$$kT_e \text{grad } n + ne \vec{v}_e \wedge \vec{B} = n m_e \nu (\vec{v}_i - \vec{v}_e) \quad (1)$$

$$kT_i \text{grad } n - ne \vec{v}_i \wedge \vec{B} = -n m_i \nu (\vec{v}_i - \vec{v}_e) \quad (2)$$

où $\vec{B}$ est le champ magnétique à l'intérieur du plasma, différent du champ uniforme qui régnait dans la bouteille ($0 < h < R$), avant l'injection de plasma.

ν est la fréquence moyenne de collision électron-ion

$$\nu = \frac{4\pi e^2 (n_i m_i + n_e m_e) \ln \Lambda (T_e, m_i)}{(kT_e)^{3/2} m_e (kT_i/m_i + kT_e/m_e)^{1/2}}$$

$$= 3,6 \times 10^{-6} \frac{n \ln \Lambda(T_e, n)}{\left(T_e + \frac{m_e}{m_i} T_i\right)^{3/2}} \quad (3)$$

3) $\ln \Lambda(T_e, n)$ est le logarithme coulombien (cf. chapitre I) pour la température électronique T_e et la densité n :

$$\begin{aligned} \ln \Lambda(T_e, n) &= 18 \pi \left(\frac{\varepsilon_0 k}{e^2} \right)^{3/2} \frac{T_e^{3/2}}{n^{1/2}} \begin{cases} 1 & T_e < T_0 \\ (T_0/T_e)^{1/2} & T_e > T_0 \end{cases} \\ &= 1,24 \times 10^7 \frac{T_e^{3/2}}{n^{1/2}} \begin{cases} 1 & T_e < T_0 \\ (T_0/T_e)^{1/2} & T_e > T_0 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\left(T_0 = \frac{4\pi^2 e^4 m_i}{3k} = 4,2 \times 10^4 \text{ K} \right)$$

En coordonnées cylindriques ($\partial/\partial\theta = \partial/\partial\phi = 0$), les équations (1) et (2) s'écrivent :

$$\frac{\partial T_e}{\partial t} \frac{dn}{dt} + n e v_{e0} E_z = n m_e \nu (v_{th} - v_{e0})$$

$$- n e v_{e0} E_z = n m_i \nu (v_{i0} - v_{e0})$$

$$n e (v_{th} \frac{\partial}{\partial r} - v_{e0} \frac{\partial}{\partial r}) = 0$$

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} \frac{dn}{dt} - n e v_{i0} E_z = - n m_e \nu (v_{th} - v_{e0})$$

$$n e v_{i0} E_z = - n m_i \nu (v_{i0} - v_{e0})$$

$$- n e (v_{th} \frac{\partial}{\partial r} - v_{i0} \frac{\partial}{\partial r}) = 0$$

Il reste alors à résoudre les équations de Larmor pour l'évolution de $\vec{n}(h)$, $\vec{v}_e(h)$, $\vec{v}_i(h)$, $\vec{B}(h)$.

L'équation de Gauss $\text{div } \vec{D} = \rho$ est automatiquement satisfaite par $\vec{E} \perp \vec{D}$.

L'équation d'Ampère $\vec{\nabla} \times \vec{B} = \vec{J}$ s'écrit, en utilisant le vecteur $\vec{J}$

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}_{\text{total}} = \mu_0 (\vec{J} + \vec{J}_{\text{microscopique}})$$

(où $\vec{J}_{\text{microscopique}} = \text{rot } \vec{M}$; $\vec{M}$: aimantation)

Or

$$\vec{J}_{\text{total}} = ne(\vec{v}_e - \vec{v}_i)$$

En effet $\vec{u} = \langle \vec{v} \rangle$ n'est pas la vitesse de dérive $\vec{v}_d$ du centro-guide $\vec{r}_g$ de la particule dans le champ magnétique (pour laquelle on aurait $\vec{J} = ne(\vec{v}_{eg} - \vec{v}_{ig})$) mais la vitesse moyenne de la particule sur sa trajectoire ; le courant d'aimantation $\vec{J}_{\text{microscopique}} = \text{rot } \vec{M}$, dû à la rotation de la particule dans le champ magnétique, est compris dans $ne(\vec{v}_e - \vec{v}_i)$.

Ainsi

$$\text{rot}_x \vec{B} = 0 = \mu_0 ne(\dot{\varphi}_{ie} - \dot{\varphi}_{ii}) \quad (4)$$

$$\text{rot}_y \vec{B} = -\frac{dB_z}{dx} = \mu_0 ne(\dot{\varphi}_{ie} - \dot{\varphi}_{ii})$$

$$\text{rot}_z \vec{B} = \frac{1}{h} \frac{d}{dt} h B_z = 0 \quad , \quad d'apr \quad B_z = \text{constante} = \frac{1}{h}$$

Pour $h=0$, B_0 est fini ou nul, donc :

$$B_0 = 0$$

L'équation $\text{div } \vec{B} = 0$ donne :

$$\frac{1}{h} \frac{d}{dh} h B_h = 0 \quad \text{d'où} \quad B_h = \text{constante} \times \frac{1}{h}$$

Pour $h=0$, B_h est fini ou nul, donc :

$$B_h = 0$$

L'équation de Faraday enfin, $\text{rot } \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0$ est automatiquement vérifiée ($\vec{E} = 0$)

De l'équation (5) on déduit

$$v_{\theta} = v_{\phi} = v_z$$

Les vitesses moyennes radiales (vitesses de diffusion transverses à $\vec{v}$) électromagnétique et ionique sont égales. On traduit parfois cette propriété en disant que la diffusion est isotropique. Il se remarque que $v_{\theta} = v_{\phi} = v_z$ (les flux de fuite des électrons et des ions sont égaux et doivent être compensés, en signe contraire, par l'impulsion de courants égaux et d'opposés).

On dispose donc en définitive, pour déterminer les 5 fonctions de A uniquement de v_{θ} , v_{ϕ} , v_z , v_{θ} et v_z (les 5 relations)

$$n \frac{v_z}{\lambda} = \frac{5k}{2} \begin{cases} 1 & 0 \leq \lambda < \infty \\ e^{\lambda^2/\lambda^2} & 0 \leq \lambda < \infty \end{cases} \quad (6)$$

$$\frac{5kT_e}{2} \frac{dn}{d\lambda} - n e B v_{ze} = 0 \quad (7)$$

$$n e B v_{ze} = n \eta_{ze} \gamma (\eta_{ze} - \eta_{ze}) \quad (8)$$

$$\frac{5kT_e}{2} \frac{dn}{d\lambda} + n e B v_{ze} = 0 \quad (9)$$

$$\frac{5kT_e}{2} \frac{dn}{d\lambda} + n e B v_{ze} = - \frac{dB}{d\lambda} \quad (10)$$

On définit une fonction de n définie par (3) et (4).

3.3.- DRIFTES DES PARTICULES DANS LE CHAMP MAGNÉTIQUE

3.3.1.- Expression des vitesses de dérive

Des équations (7), (8) et (9) on trouve :

$$v_{ze} = - \frac{5kT_e}{eB} \frac{1}{n} \frac{dn}{d\lambda} \quad (11)$$

$$v_{ze} = - \frac{5kT_e}{eB} \frac{1}{n} \frac{dn}{d\lambda} \quad (12)$$

$$v_{ze} = v_{ze} = v_{ze} = - \gamma \frac{n \eta_{ze} k (T_e + T_i)}{n e^2 \lambda^2} \frac{dn}{d\lambda} \quad (13)$$

4.- VARIATION RADIALE DE LA DENSITE []

Les relations (11), (12) et (14) du paragraphe précédent, ainsi que (10) et (13) en fonction de r et T (qui sont des données), mais aussi du confinement de n et de B qui sont des fonctions encore inconnues de r . Pour pouvoir donner une expression explicite de T_e , T_i et n , et donc de la diffusion radiale, il reste à calculer $n(r)$ et $B(r)$. La connaissance de ces fonctions est d'ailleurs indispensable en soi pour préciser la nature du confinement.

On se d'abord, à l'aide du théorème d'Ampère (équation (10)), exprimer B en fonction de n .

4.1.- Diamagnétisme du plasma $B(n)$

En portant dans l'équation (10) les expressions (11) et (12), de v_{e0} et de v_{i0} , on obtient :

$$\mu_0 \frac{k(T_i + T_e)}{B} \frac{dn}{dr} = - \frac{dB}{dr}$$

équation qu'on peut encore écrire :

$$\frac{d}{dr} \left[\frac{B^2}{2\mu_0} + k(T_i + T_e)n \right] = 0$$

Soit :

$$\frac{B^2}{2\mu_0} + k(T_i + T_e)n = \text{constante}$$

La "pression" totale, somme de la "pression" magnétique $B^2/2\mu_0$ et de la pression cinétique $k(T_i + T_e)n$, reste constante, quand on s'enfonce dans le plasma. Sur la paroi matérielle (non ferro-magnétique), en $r = R$, $n = 0$

(au contact de la paroi, les porteurs de charge se recombinaient pour donner des neutres) et $B(\vec{R}) = B$ (champ uniforme créé par les bobines extérieures dans tout le cylindre, en l'absence de plasma). Donc :

$$\frac{B^2}{2\mu_0} + nk(T_i + T_e) = \frac{B^2}{2\mu_0}$$

d'où :

$$n(r) = \left[1 - \frac{k(T_i + T_e)n}{B^2/2\mu_0} \right]^{1/2} \quad (4)$$

3.4.2. Variation radiale de la densité $n(r)$.

Comme tenu de [13], on peut mettre η (formule (11)), sous la forme (η est proportionnel à $\ln \Lambda$, cf. 2.3.4.)

$$\eta = \frac{\eta(T_e, N)}{B^2} \frac{k(T_i + T_e)}{\ln \Lambda} \frac{\ln \Lambda(T_e, n)}{\ln \Lambda(T_e, N)} \frac{dn}{dr}$$

où :

$$N = B^2 / 2\mu_0 k(T_i + T_e)$$

On a d'autre part, d'après (4) :

$$\ln \Lambda(n) = \ln \Lambda(N) \left[1 - \frac{\ln n/N}{2 \ln \Lambda(N)} \right]$$

On verra plus loin que, dans le cadre des hypothèses déjà faites, on a toujours :

$$\left| \ln \frac{n}{N} \right| \ll 2 \ln \Lambda(N)$$

...

a pour équation :

$$\frac{x}{\rho\beta} = \begin{cases} 1 - \frac{x^2}{1 - 2 \ln \rho} & 0 < x < \rho \\ - \frac{2\rho^2 \ln x}{1 - 2 \ln \rho} & \rho < x < 1 \end{cases}$$

Pour construire dans un cas particulier la courbe de densité $n(x)$

on commence par calculer β , puis $1/\rho$, puis $\beta = 1/\rho$ ou on déduit avec $\beta = \frac{1}{2} [1 - \rho^2 (1 - \ln \rho)]$ et enfin, le le nombre $\beta_p(x)$ on obtient la courbe $n(x)$ par la double intégrité $n(x) = \frac{1}{\rho} \int_0^x \int_0^{\beta_p(x)} \rho(x, \beta)$

5.4.3. - Limite de validité des hypothèses $|\vec{v}_0| \ll (kT_e/m_e)^{1/2}$,

$$|\vec{v}_0| \ll (kT_e/m_e)^{1/2}, \quad \lim_{n \rightarrow 0} \Lambda(n) = \lim_{n \rightarrow 0} \Lambda(n)$$

Tous les calculs précédents ont été faits au 1er ordre en

$$v_0/(kT_e/m_e)^{1/2} \text{ et } v_0/(kT_e/m_e)^{1/2} \text{ (vitesse de dérive/vitesse d'agitation thermique)}$$

v_0 et v_0 sont proportionnels (formules (11) et (12)) à $(1/n) dn/dx$, v_0 (formule (14)) à dn/dx . Or nous venons de voir que lorsque on s'approche de la particelle chargée ($x \rightarrow 0$), $n \rightarrow 0$ et $dn/dx \rightarrow +\infty$. Les hypothèses $v_0 \ll (kT_e/m_e)^{1/2}$, $v_0 \ll (kT_e/m_e)^{1/2}$ ne sont donc certainement pas valables jusqu'à la limite où a été écrit $\lim_{n \rightarrow 0} \Lambda(n) = \lim_{n \rightarrow 0} \Lambda(n)$, on peut supposer qu'on avait $\lim_{n \rightarrow 0} n/\rho \propto \lim_{n \rightarrow 0} \Lambda(n)$. Nous allons présenter le domaine de validité de ces différentes hypothèses.

La condition $v_0 \ll (kT_e/m_e)^{1/2}$ conduit à

$$-(1/n) dn/dx \ll v_0/(kT_e/m_e)^{1/2} = \sqrt{e}/\rho \quad (\text{pour } n \rightarrow 0, \text{ } \beta \rightarrow 1)$$

ρ (vitesse de l'onde électrostatique). Or avec la condition $v_0 \ll (kT_e/m_e)^{1/2}$ conduit à $-(1/n) dn/dx \ll \sqrt{e}/\rho$

La figure 1 représente les variations de α en fonction de β .

On a pu constater que α est une fonction croissante de β .

$$\alpha = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \quad \text{pour } \beta \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0 \quad \text{pour } \beta < 0$$

Il résulte de cette équation que pour une valeur donnée de β , la valeur de α est déterminée. On a donc une courbe unique pour une valeur donnée de β . On a donc une courbe unique pour une valeur donnée de β .

On a pu constater que α est une fonction croissante de β .

Il résulte de cette équation que pour une valeur donnée de β , la valeur de α est déterminée. On a donc une courbe unique pour une valeur donnée de β .

On a pu constater que α est une fonction croissante de β .

Il résulte de cette équation que pour une valeur donnée de β , la valeur de α est déterminée. On a donc une courbe unique pour une valeur donnée de β .

On a pu constater que α est une fonction croissante de β .

Il résulte de cette équation que pour une valeur donnée de β , la valeur de α est déterminée. On a donc une courbe unique pour une valeur donnée de β .

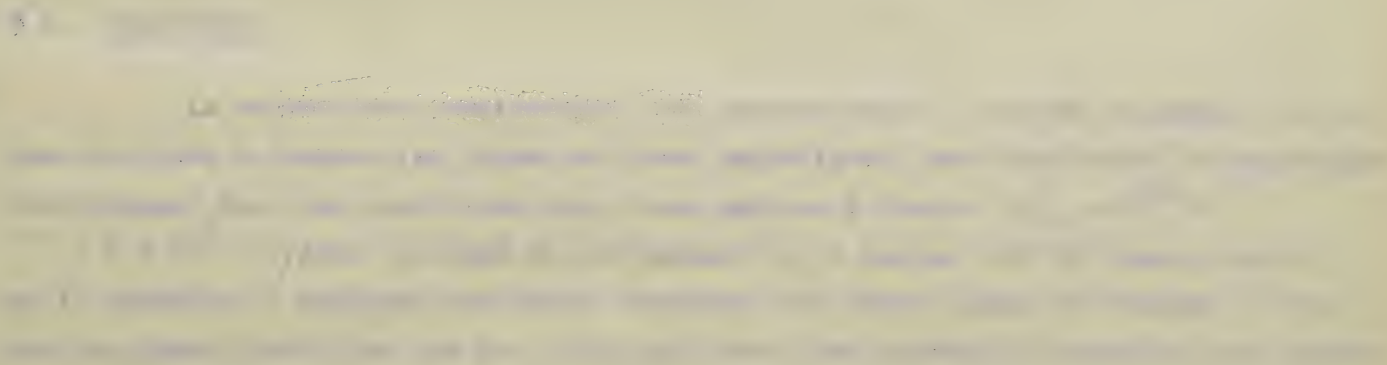
$$\alpha = 1 - \frac{1}{2} \left(\frac{1 - \beta}{1 + \beta} \right)^2 \quad \text{pour } \beta \geq 0 \quad \text{et} \quad \alpha = 0 \quad \text{pour } \beta < 0$$

On a pu constater que α est une fonction croissante de β .

On a pu se rendre compte des variations du temps de vie d'une particule de neutron successivement en β , α , γ et δ en fonction des conditions suivantes :

avec $(\beta, \alpha, \gamma, \delta) = (10^{-21}, 10^{-16}, 10^{-10}, 10^{-8})$ s pour $\rho = 1/2$ et $R = 0,2$ m, $I = 160$ A/m, pour $B = 10$ tesla (10000 gauss).

Il en résulte un β de 0,17, $\gamma \approx 0,28$ et on trouve



Les fuites transversales ne constituent donc pas un phénomène négligeable car jusqu'à présent elles ont été négligées par les portés encore plus considérées par instabilité en particulier), mais un phénomène essentiel, dans la cinétique du fuser réacteur thermonucléaire.

3.- BIBLIOGRAPHIE

1. A.A. VEDENKOV et al. : Deuxième conférence internationale des Nations-Unies sur les applications pacifiques de l'énergie atomique, GENÈVE (1959).
- J.M. DOLBEET, Brevet français 1 236 034 (1959)
3. Y.I. ARSENIYEV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, (A.I.E.A.), Salzbourg, (1961), OM 1/218
- Y.I. ARSENIYEV et al., "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion", vol. 1, édit. Leontovic, Moscou (1958)
5. L. SPITZER, in "Physics of Fully Ionized Gases", Intersc. Publ. New York (1955)
6. A. SIMON, Phys. Rev., 100, 1557 (1955)
- C.L. LONGMIRE, M.N. ROSENBLUTH, Phys. Rev. 103, 507 (1956)
8. S.I. VEDENKOV, in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion", vol. 1, édit. Leontovic, Moscou (1958)
9. A.I. VEDENKOV, in "Plasma Physics and Controlled Nuclear Fusion", Hermann, Paris (1960)
10. A.I. VEDENKOV, A.M. KAUFMAN, Phys. Rev., 109, 1 (1958)
11. A.I. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
12. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
13. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
14. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
15. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
16. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
17. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
18. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
19. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218
20. S. VEDENKOV et al., Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, Salzbourg, (1961), OM 1/218

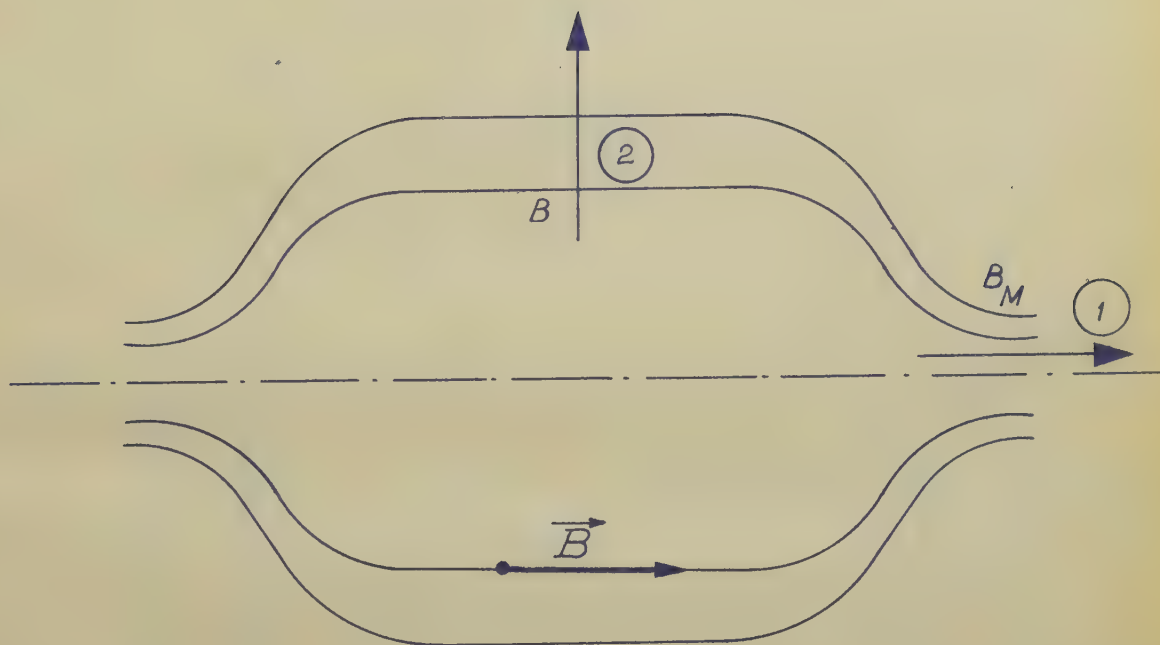


FIG.1 - SCHEMA DE PRINCIPE D'UNE BOUTEILLE MAGNETIQUE

- ① FUITES PAR LES GOULOTS.
- ② FUITES A TRAVERS LES LIGNES DE FORCE MAGNETIQUES (B_M/B : RAPPORT DE MIROIR)

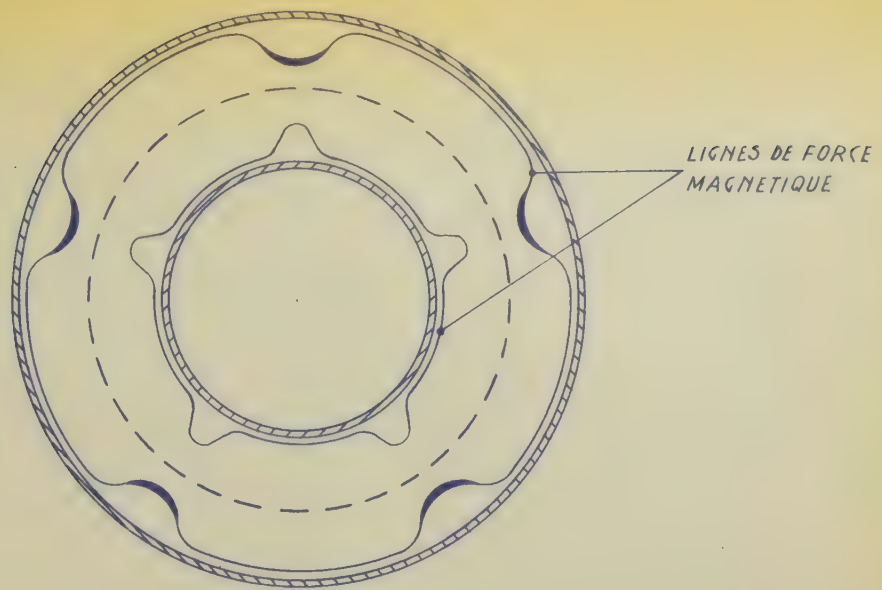


FIG. 2 - SCHEMA DE PRINCIPE D'UN ALLANTOTRON.

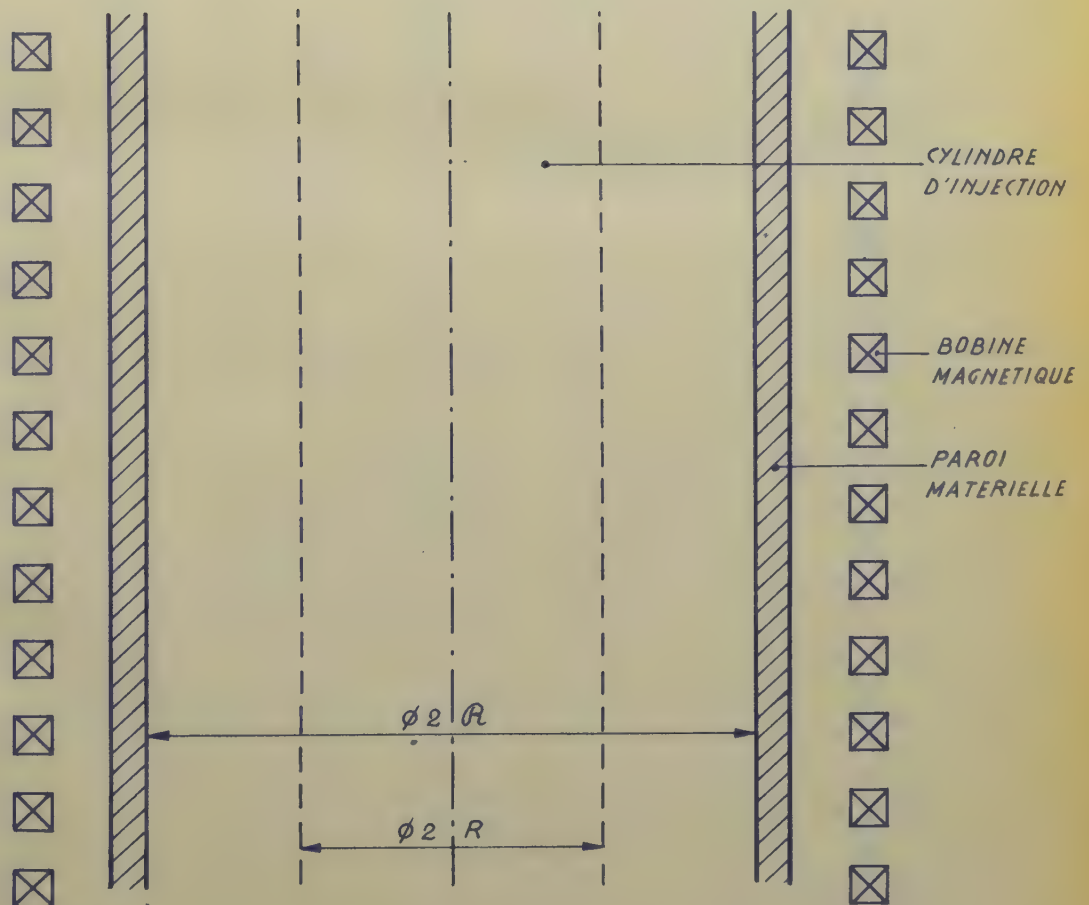


FIG. 3 - GEOMETRIE DE LA BOUTEILLE MAGNETIQUE.

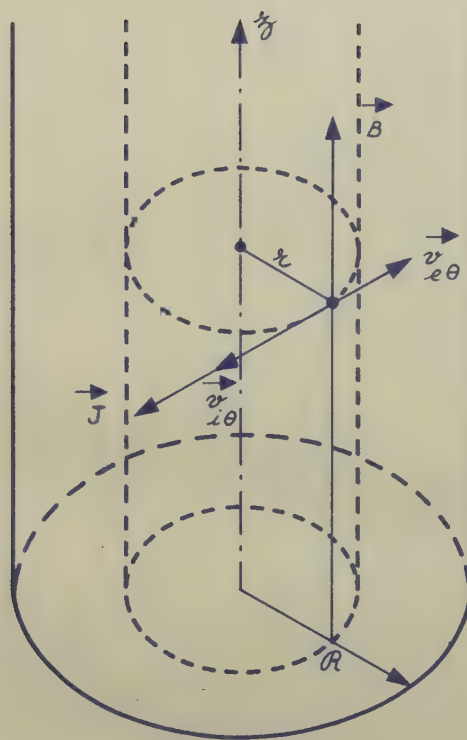


FIG.4 - VITESSES DE DERIVE AZIMUTALES
(ELECTRONIQUE $\vec{v}_{e\theta}$ ET IONIQUE $\vec{v}_{i\theta}$)
ET COURANT ($\vec{J}$) A L'INTERIEUR DU PLASMA

Distribution radiale de la densité et du champ magnétique, en coordonnées réduites
 • $(y = \frac{r}{R}, u = \frac{B(r)}{B})$ en fonction de $x = \frac{z}{R}$ pour différentes valeurs de $p = \frac{I}{I_0}$

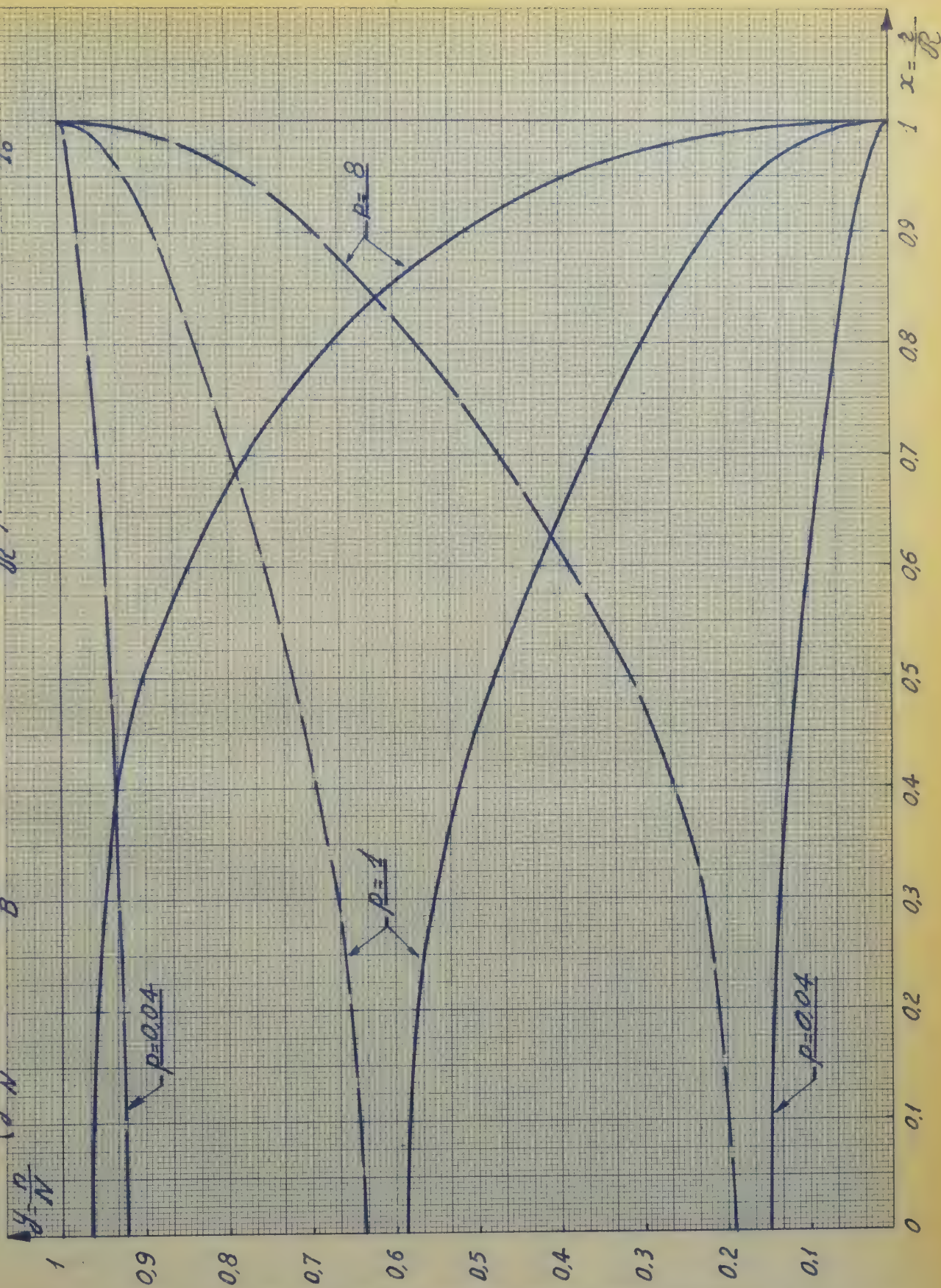


Fig. 5

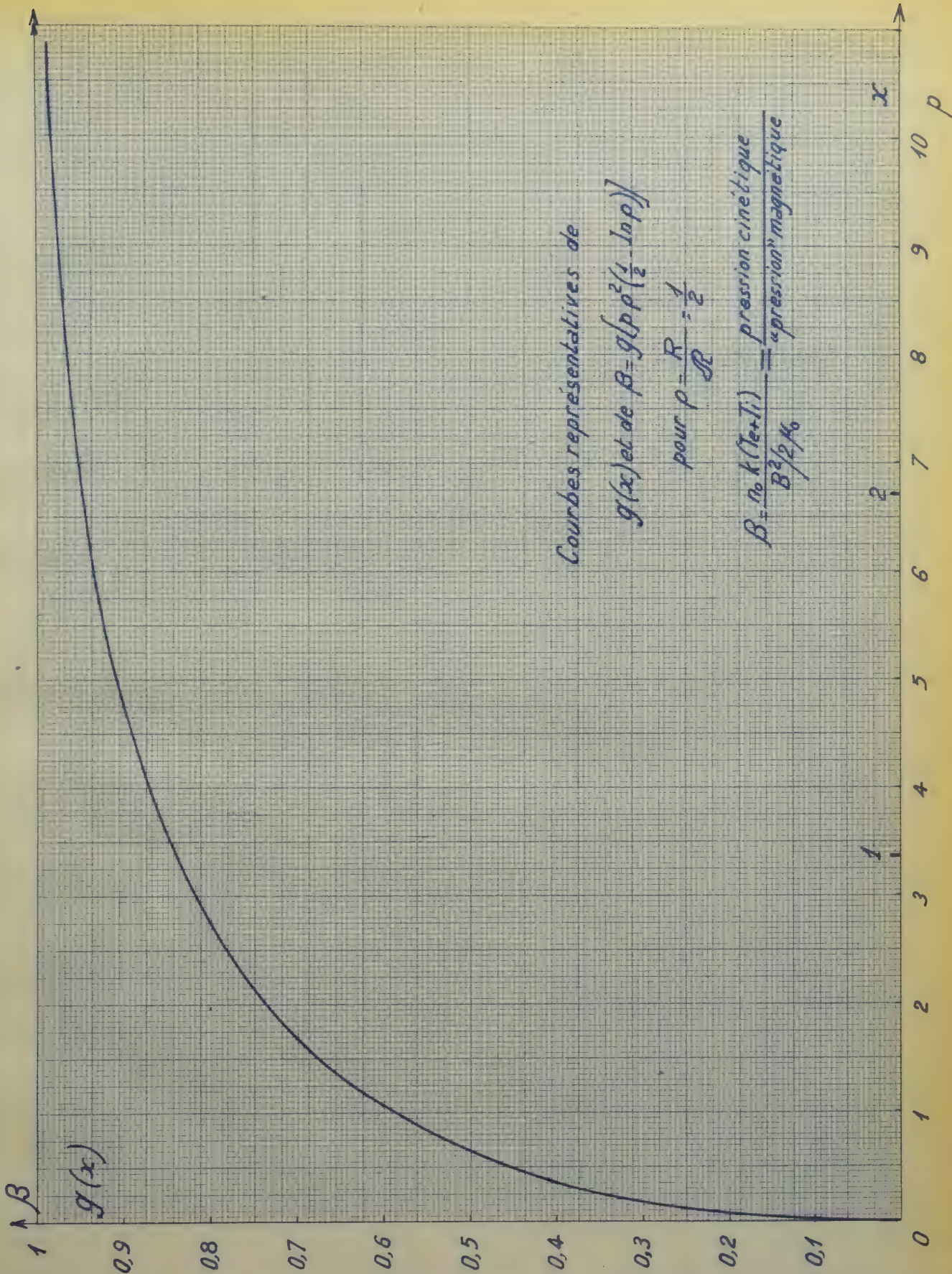
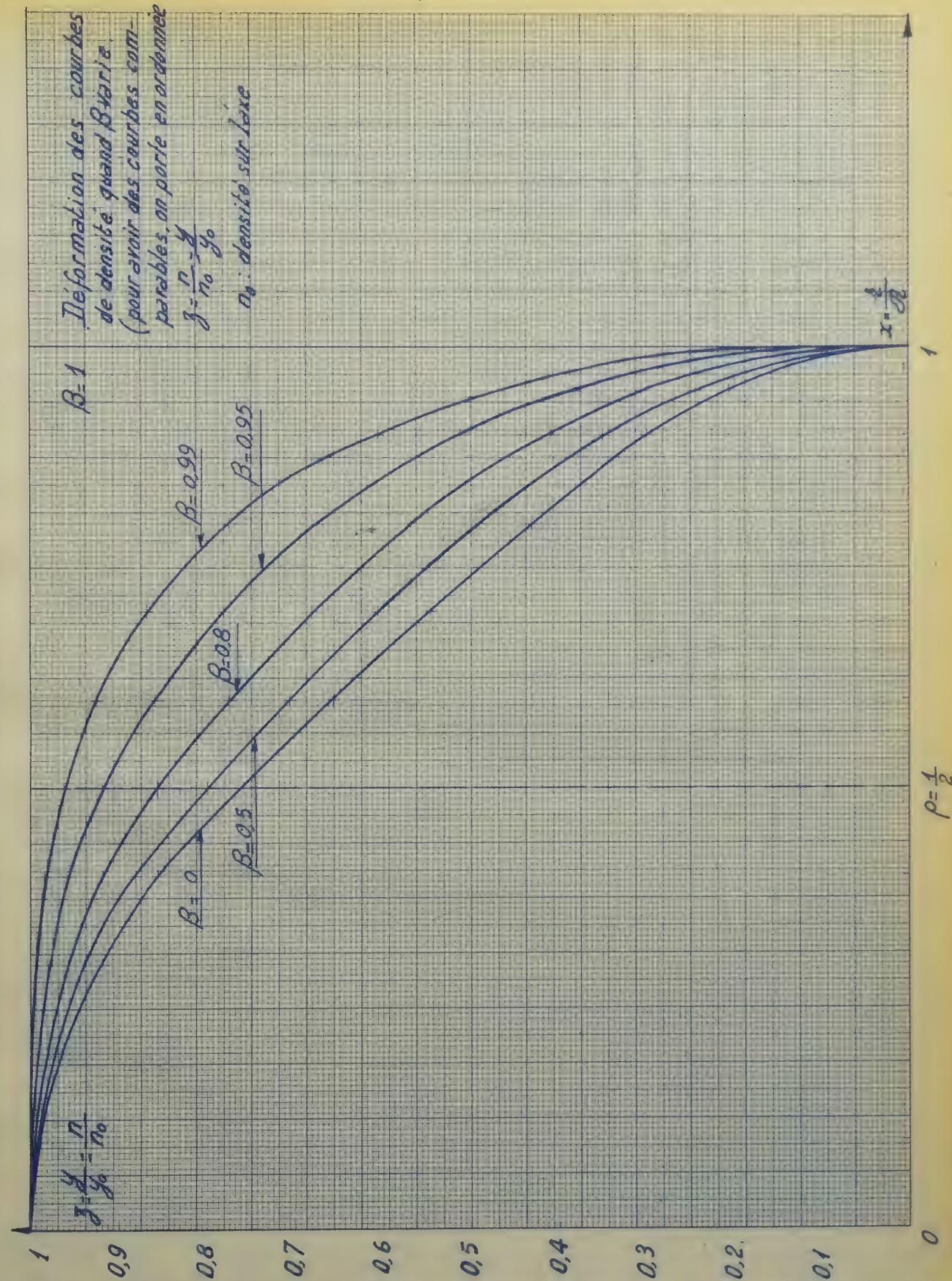


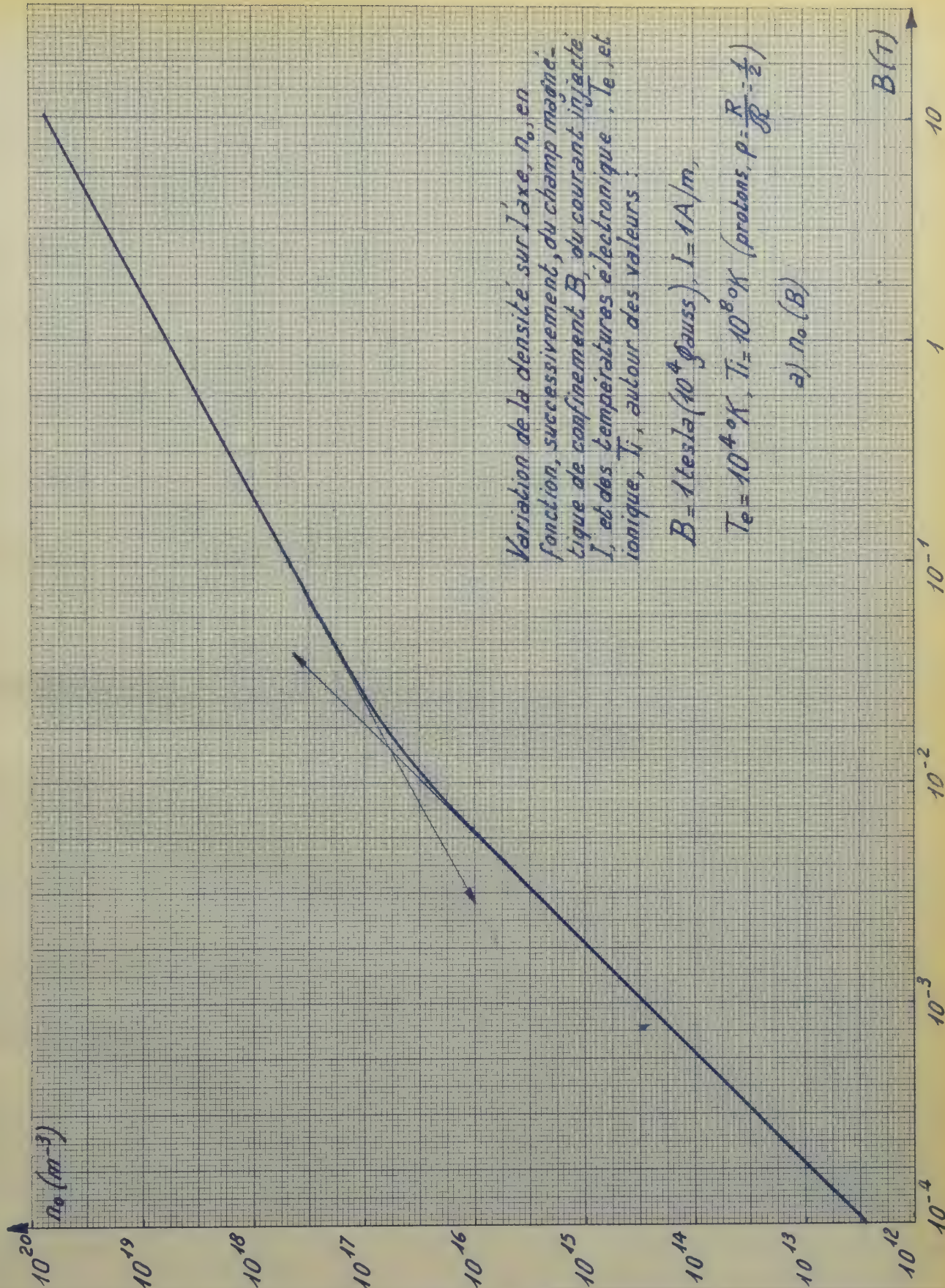
Fig. 6



Déformation des courbes
 de densité quand B varie
 (pour avoir des courbes com-
 parables, on porte en ordonnée
 $z = \frac{n - n_0}{y_0}$
 n_0 : densité sur l'axe

10^{20}
 10^{19}
 10^{18}
 10^{17}
 10^{16}
 10^{15}
 10^{14}
 10^{13}
 10^{12}

$n_0 (m^{-3})$



Variation de la densité sur l'axe n_0 , en fonction, successivement, du champ magnétique de confinement B , du courant injecté I , et des températures électronique, T_e , et ionique, T_i , autour des valeurs :

$$B = 1 \text{ tesla } (10^4 \text{ Gauss}), I = 1 \text{ A/m},$$

$$T_e = 10^4 \text{ K}, T_i = 10^8 \text{ K (protons, } p = \frac{R}{R} = \frac{1}{2})$$

a) $n_0(B)$

$B(T)$

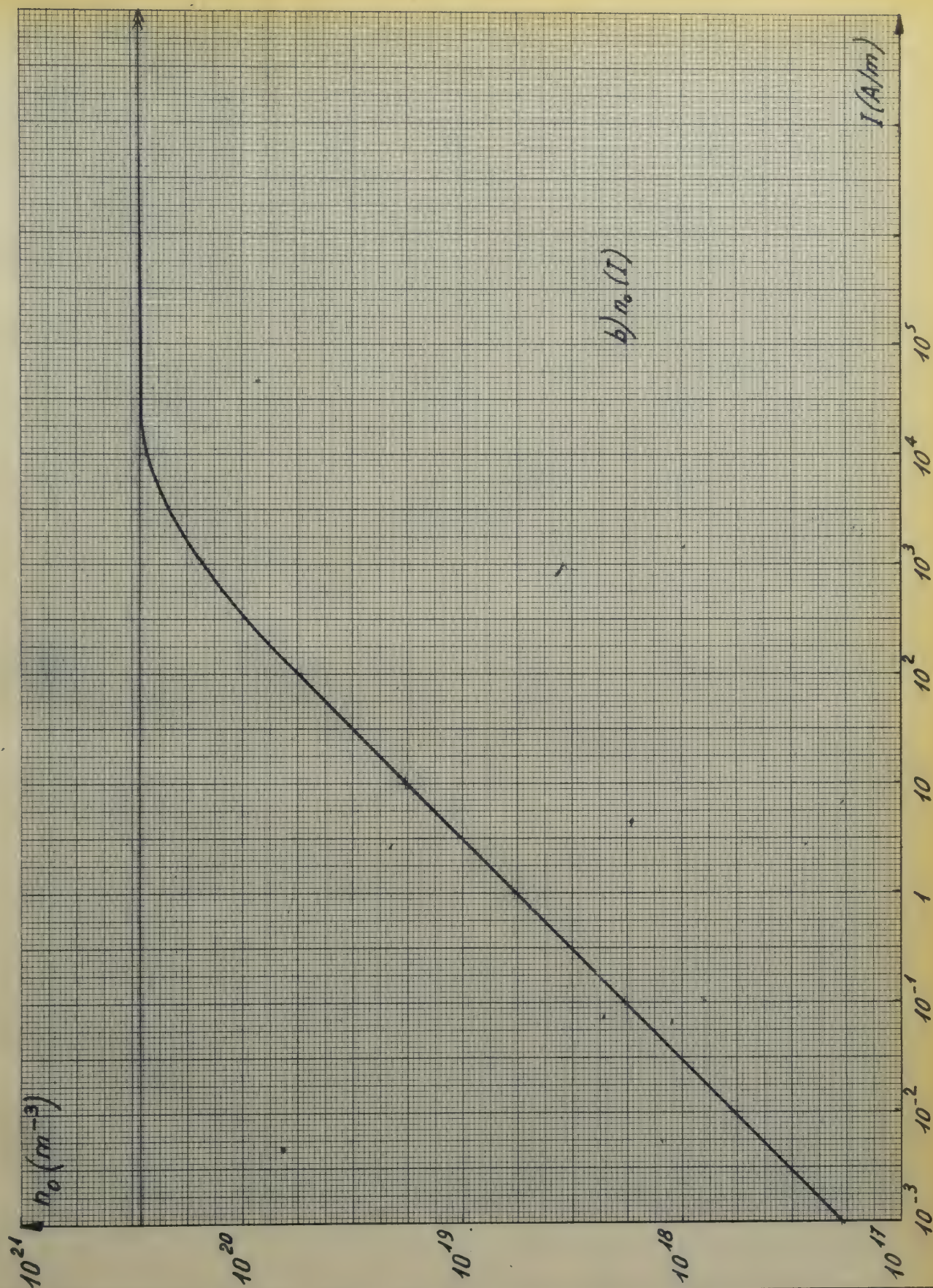
10

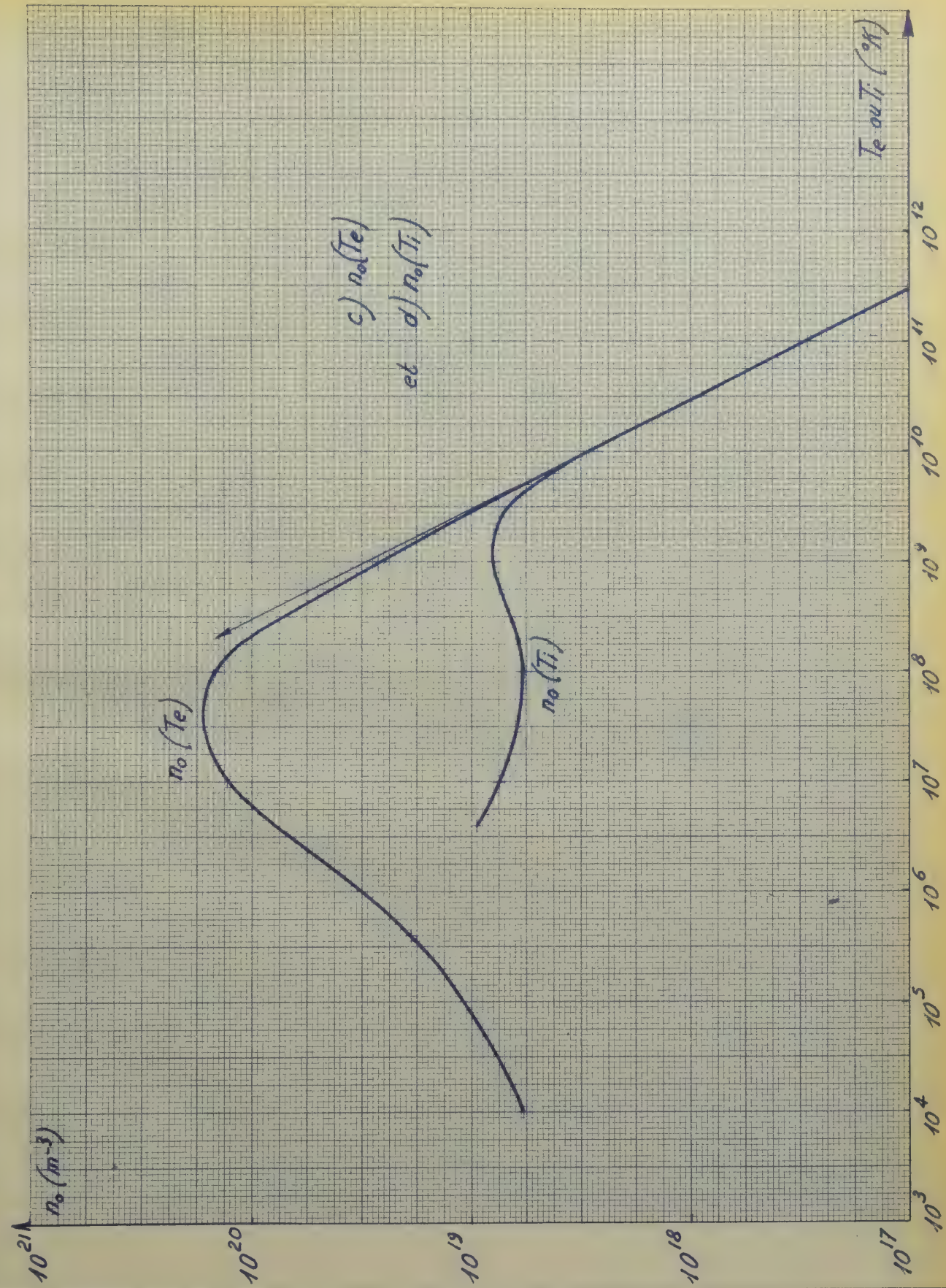
10^{-1}

10^{-2}

10^{-3}

10^{-4}





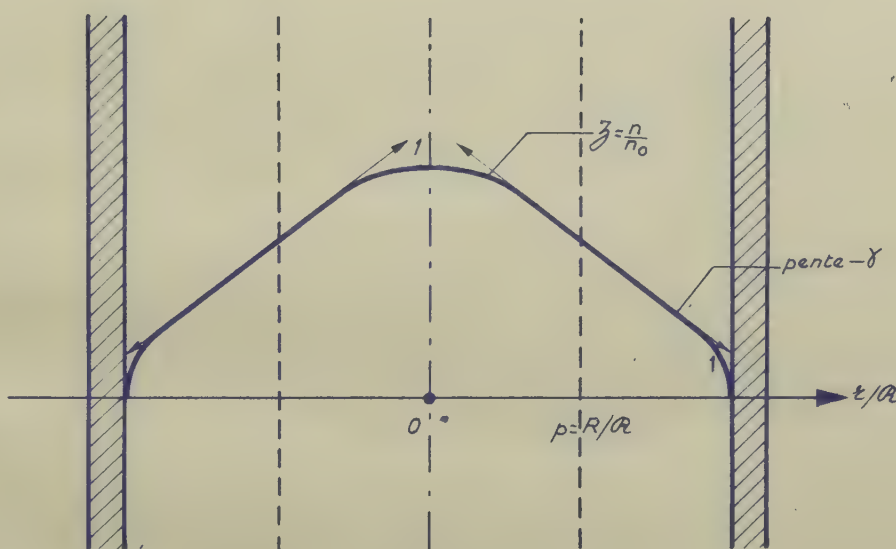


FIG. 9 - $\gamma = \frac{R}{n_0} \left(\frac{dn}{dt} \right)_{t=R}$ "RAIDEUR" DU CONFINEMENT.

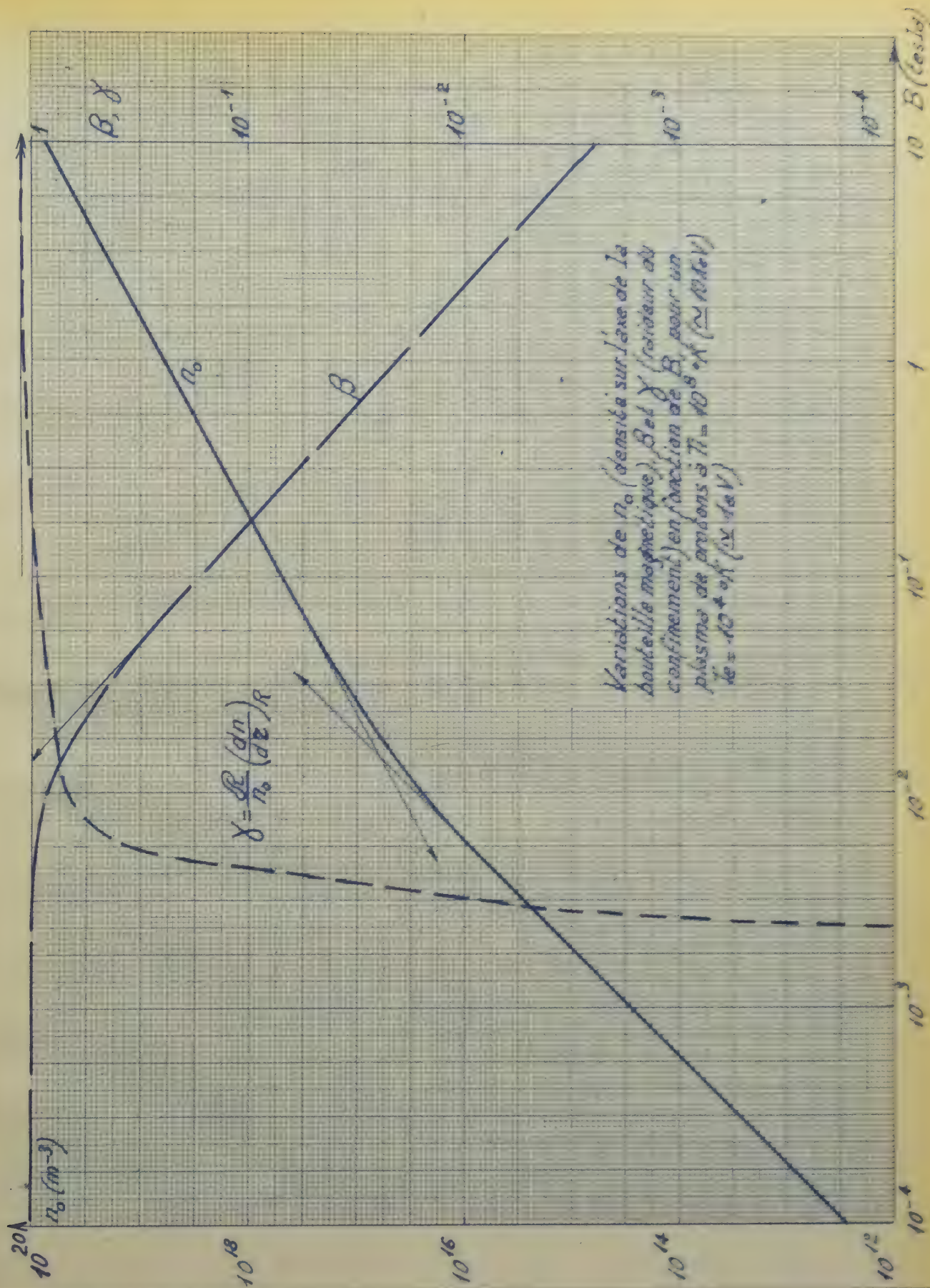


Fig. 10

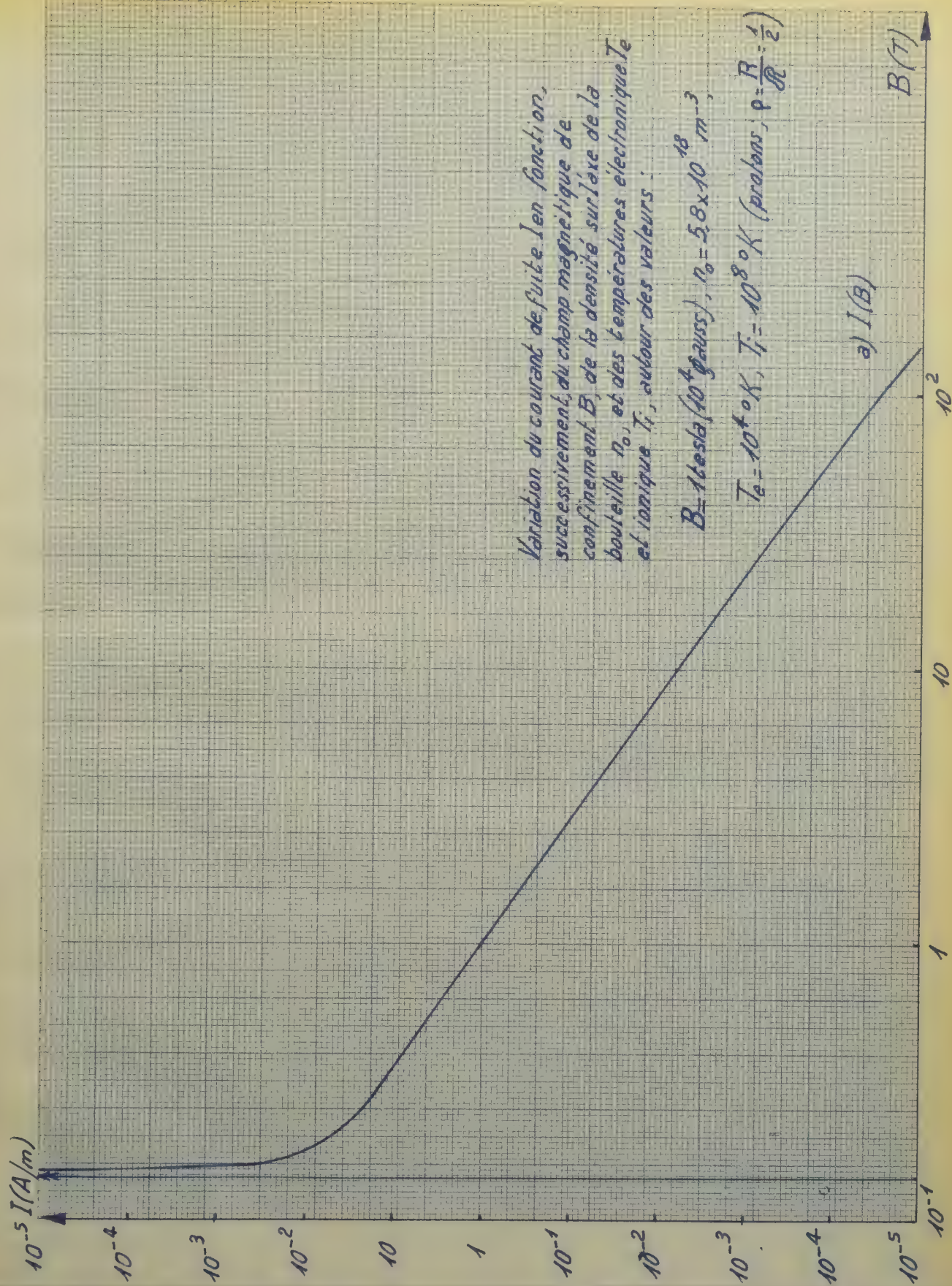


Fig. 11

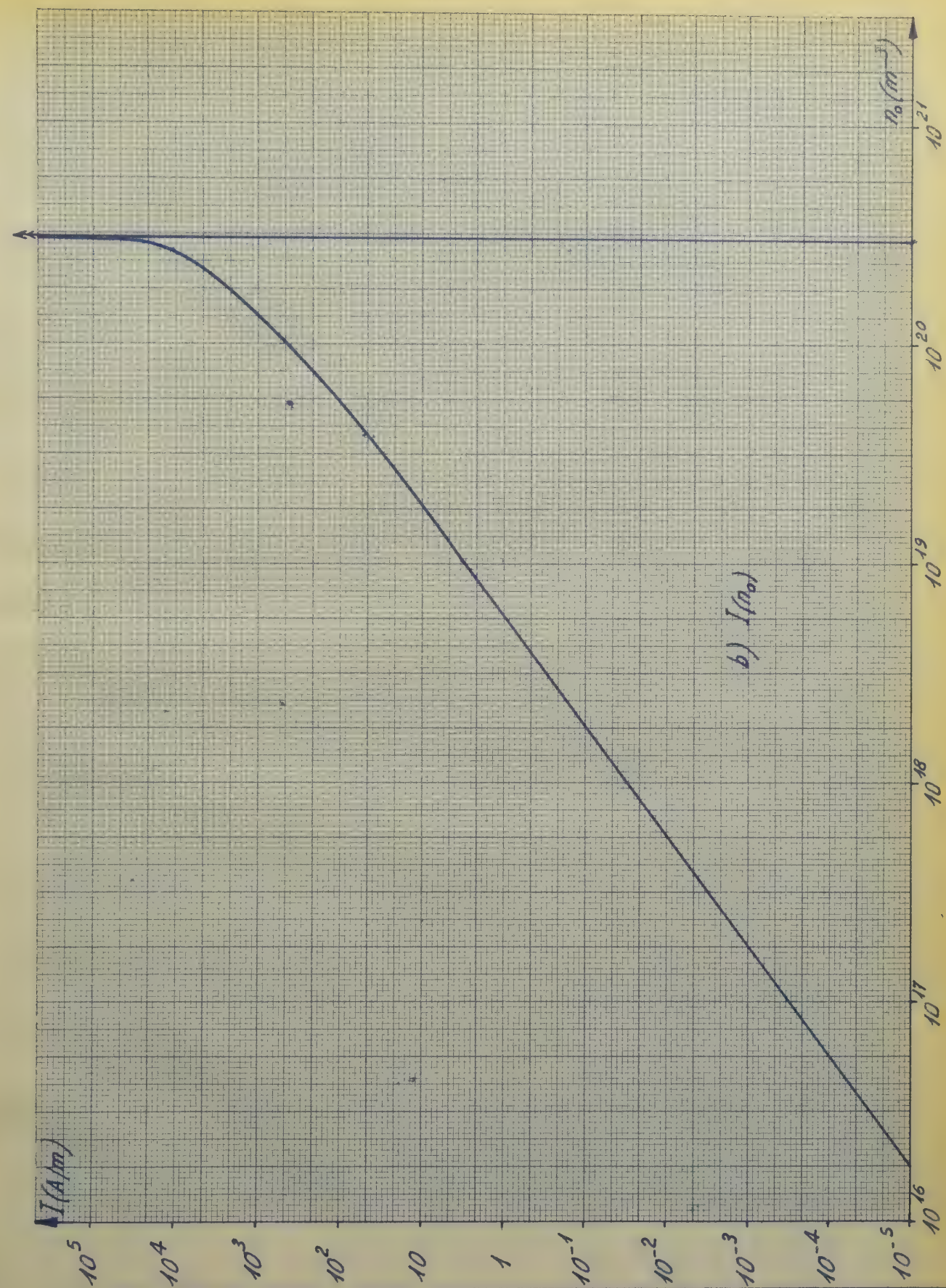


Fig. 11 b

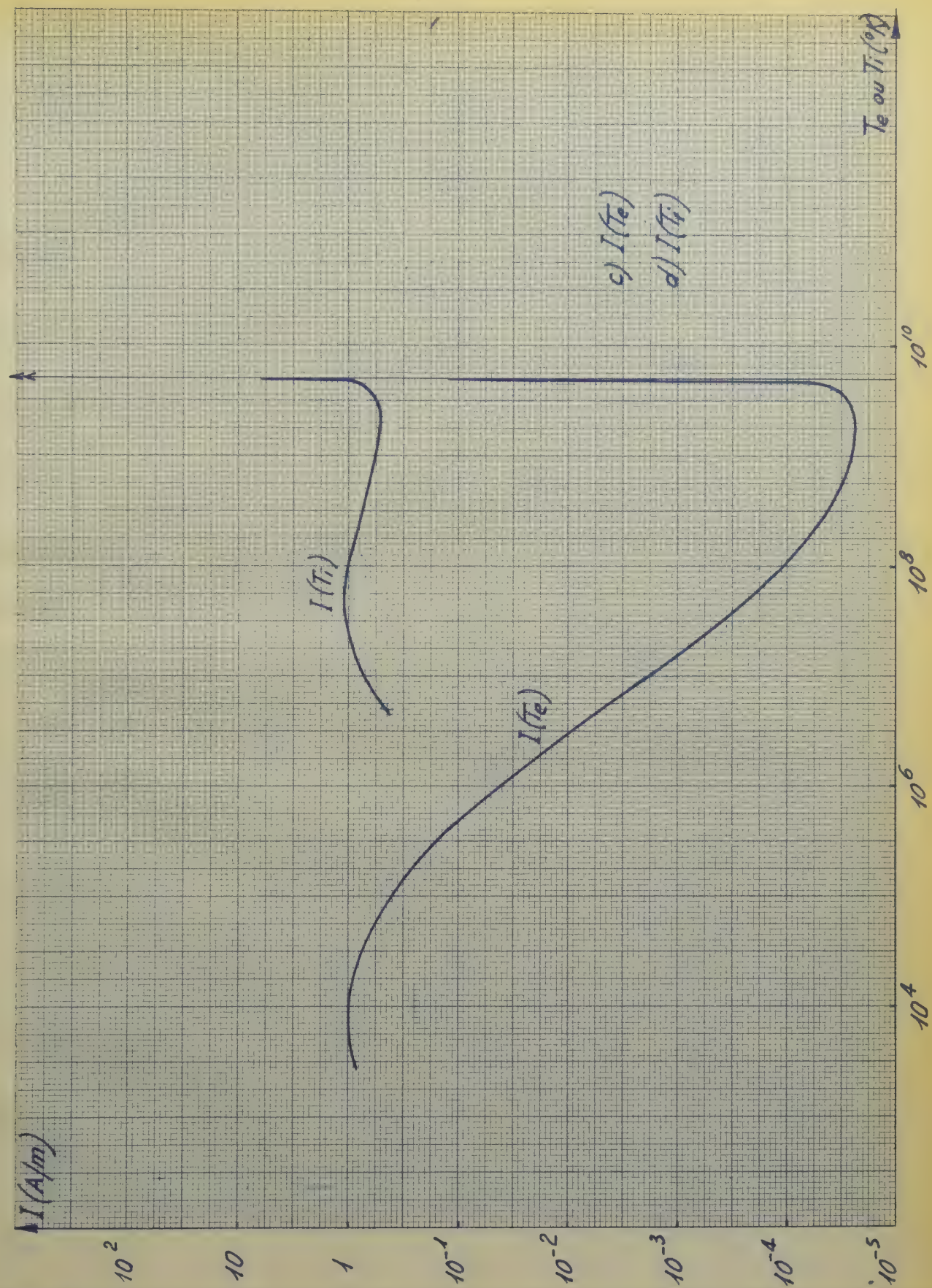
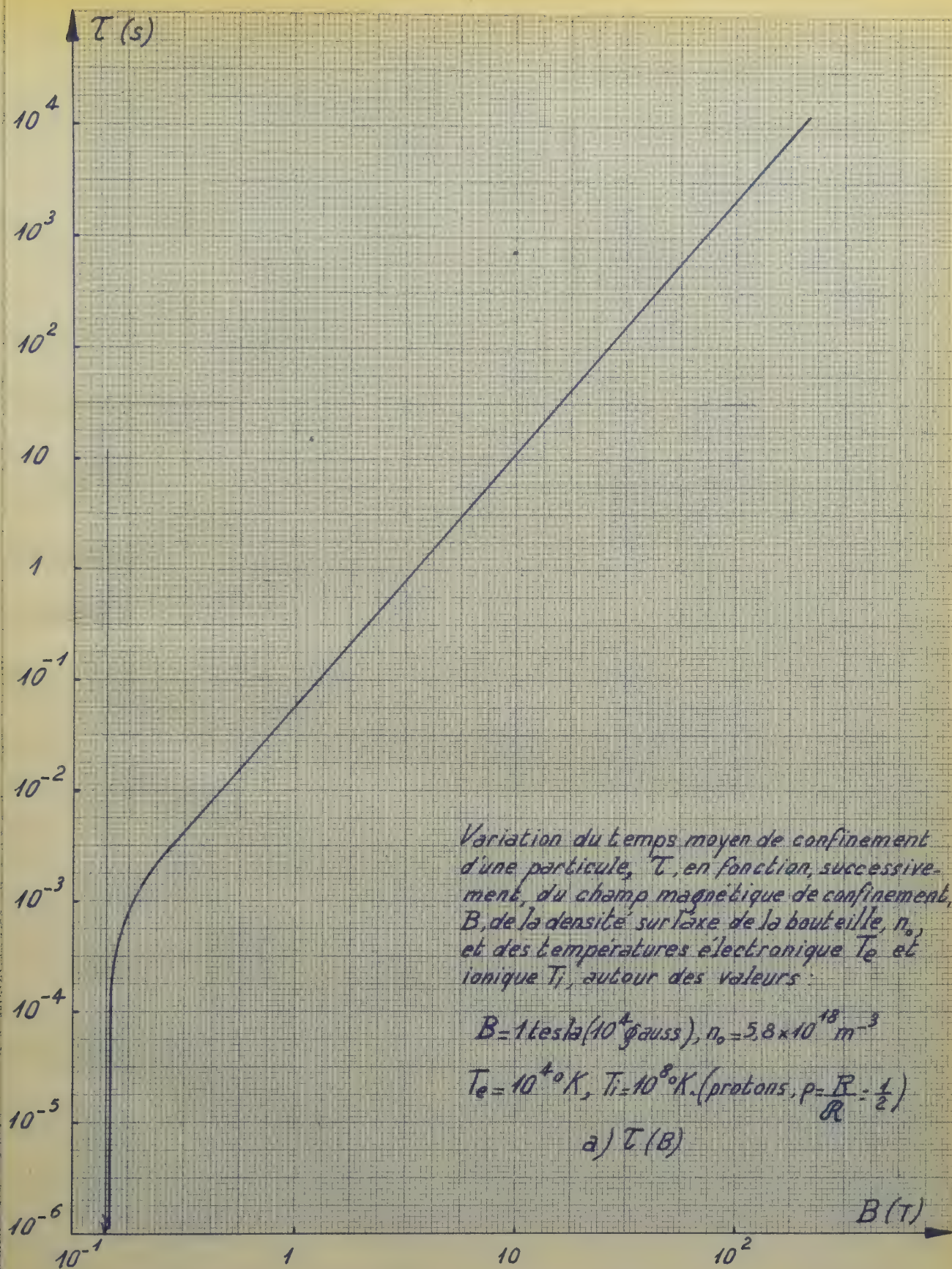
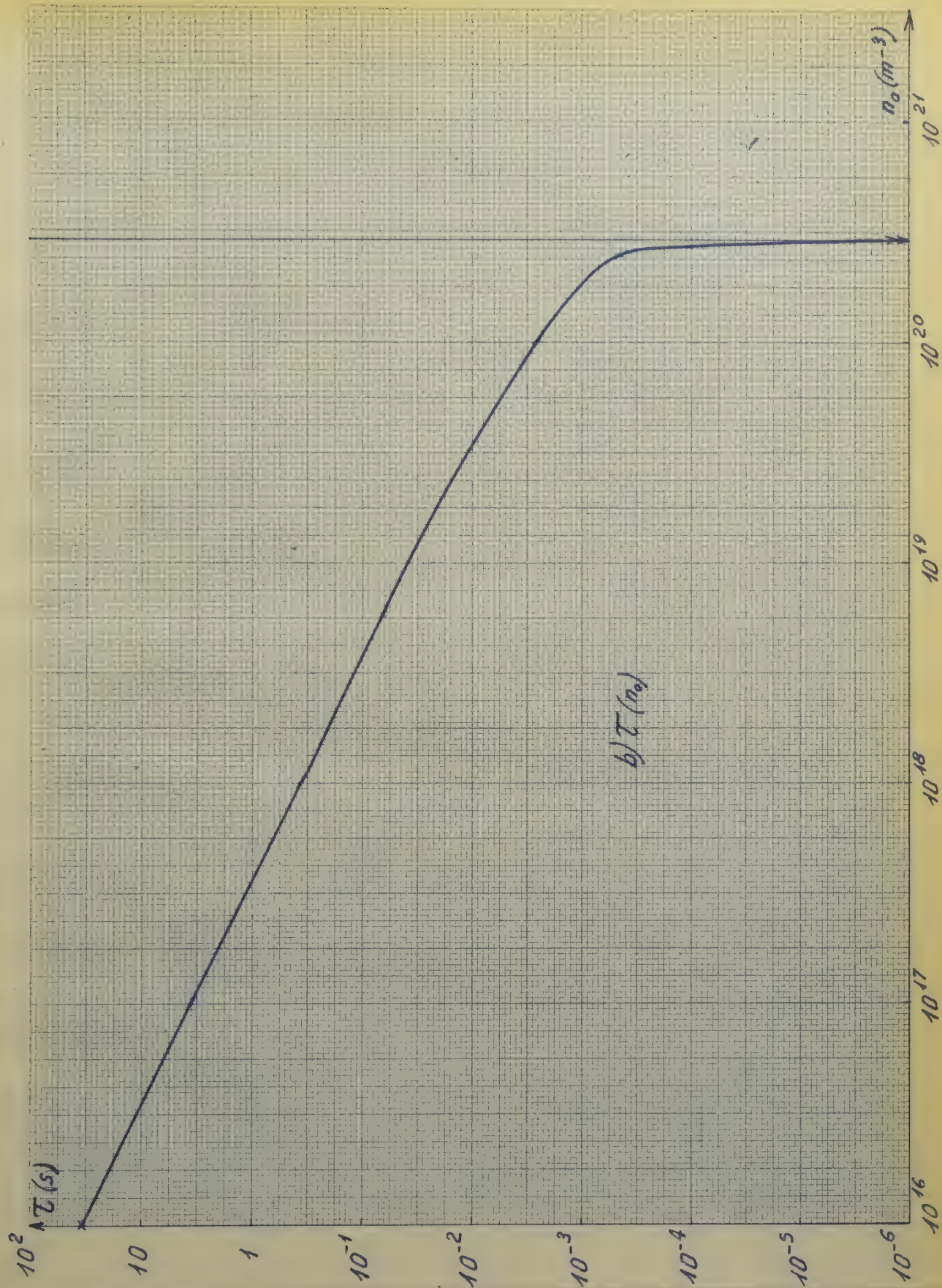
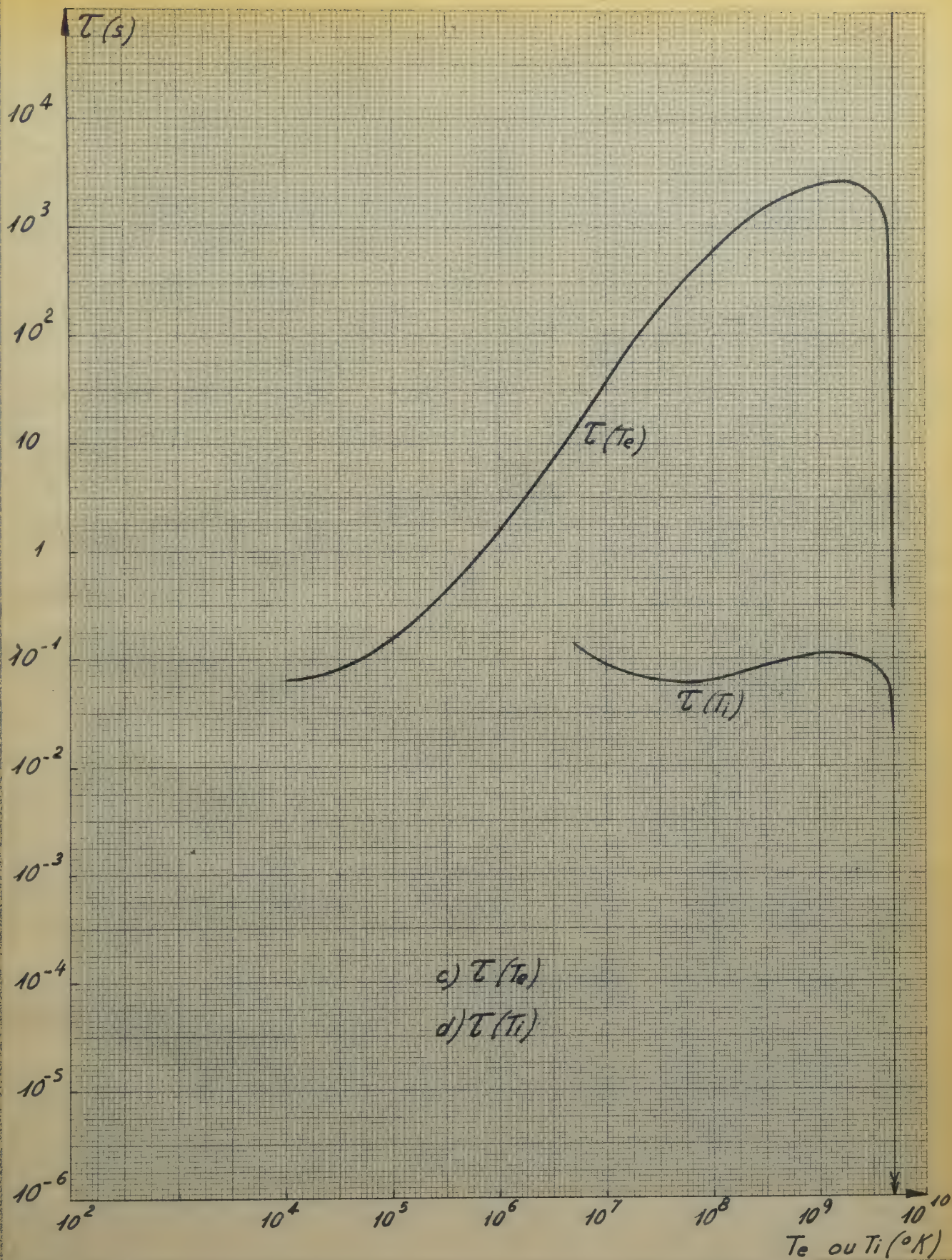


Fig. 11 c, d







1.- PROPOSES APPROCHES A L'ETUDE D'UN FAISCEAU D'IONS PAR INJECTION D'ELECTRONS

4.1.- INTRODUCTION

La réalisation d'un faisceau neutre, d'ions et d'électrons, est susceptible d'applications très intéressantes : propulsion ionique des fusées, et propulsion à travers les "pores" d'une bouteille magnétique, d'ions de grande énergie en vue de la fusion nucléaire contrôlée - en particulier.

Pour la propulsion ionique (cf. par. (1) (2)), on sait qu'il ne suffit pas d'éjecter et quantifier également les ions qui forment la propulsion, et les électrons - de façon que le faisceau ne change pas -; il faut encore - pour éviter l'ionisation dans le faisceau d'ions d'une source tirée et réfléchiement les ions sans le faire - réaliser la neutralité en charge, au moins approchée, dans le faisceau d'ions : $n_e \approx n_i$ (fig. 1).

Pour l'injection dans une bouteille magnétique d'ions de grande énergie, on compte (3) (4), sur la présence d'électrons, intimement mélangés aux ions, pour s'opposer à la déflexion des ions par le champ magnétique transversal ("paroi" de la bouteille) ; sous l'influence de ce dernier, électrons et ions se déplacent, indépendamment, dans deux sens opposés. En présence les uns des autres, un champ électrique transversal - de séparation de charge - apparaît, qui s'oppose à la séparation du faisceau neutralisé en ses deux composantes électronique et ionique (fig. 2).

Dans l'une ou l'autre de ces deux applications, il est souhaitable d'avoir des densités élevées.

Pour une fusée à propulsion ionique, la poussée est proportionnelle au courant d'ions éjecté, et donc, pour une tension d'accélération V donnée,

4.I.

née, à la densité ionique n_i dans le faisceau^(*).

Pour l'injection dans une bouteille magnétique, les champs électriques, qui assurent la collision du faisceau pénétrant iono-diélectrique, dans le la vanneuse du champ magnétique ~~composées~~, sont proportionnels à la densité⁽⁺⁾. Il existe, en outre, pour cette dernière application, une autre raison pour rechercher une densité élevée dans le faisceau : on désire obtenir à l'intérieur de la bouteille un plasma chaud très dense.

Un faisceau porteur de grande densité doit d'autre part être produit soit en régime permanent, soit en impulsion d'une durée longue devant la période ($\approx 2\pi/\omega_p$) des oscillations collectives (pour $n_i \approx 10^{17} \text{ cm}^{-3}$, $2\pi/\omega_p \approx 0,35 \text{ nanoseconde}$). Il faut donc s'attendre que le rôle des collisions soit important.

(*) La poussée par unité de surface F/S , est donnée par $F/S = 2en_i V_i$

Pour $V_i = 1 \text{ kV}$ (ordre de grandeur des accélérations optiques) et $F/S \approx 100 \text{ newton/m}^2$ (soit environ 1 gramme-force/cm²), on a $n_i = 3 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$.

(+) En sorte que pour traverser un champ magnétique d'intensité B donnée, il faut avoir $n_e \gg n_i$. Un calcul simple [4], ou une théorie plus élaborée [5] conduisent à

$$n_e = (1/\beta) \varepsilon_0 (2em_p)^{1/2} (V_i/A)^{1/2} B/A = (1/\beta) 3,8 \times 10^{11} (V_i/A)^{1/2} B/A$$

(2 : rayon du faisceau, m_p : masse du proton, $A = m_e/m_p$, nombre de masses de l'ion, $\beta \ll 1$ facteur de forme). Pour $V_i = 100 \text{ kV}$, $B = 1 \text{ tesla}$, $R = 1 \text{ cm}$, $\beta = 0,1$ on a : $n_e = 1,2 \times 10^{17} \text{ m}^{-3}$.

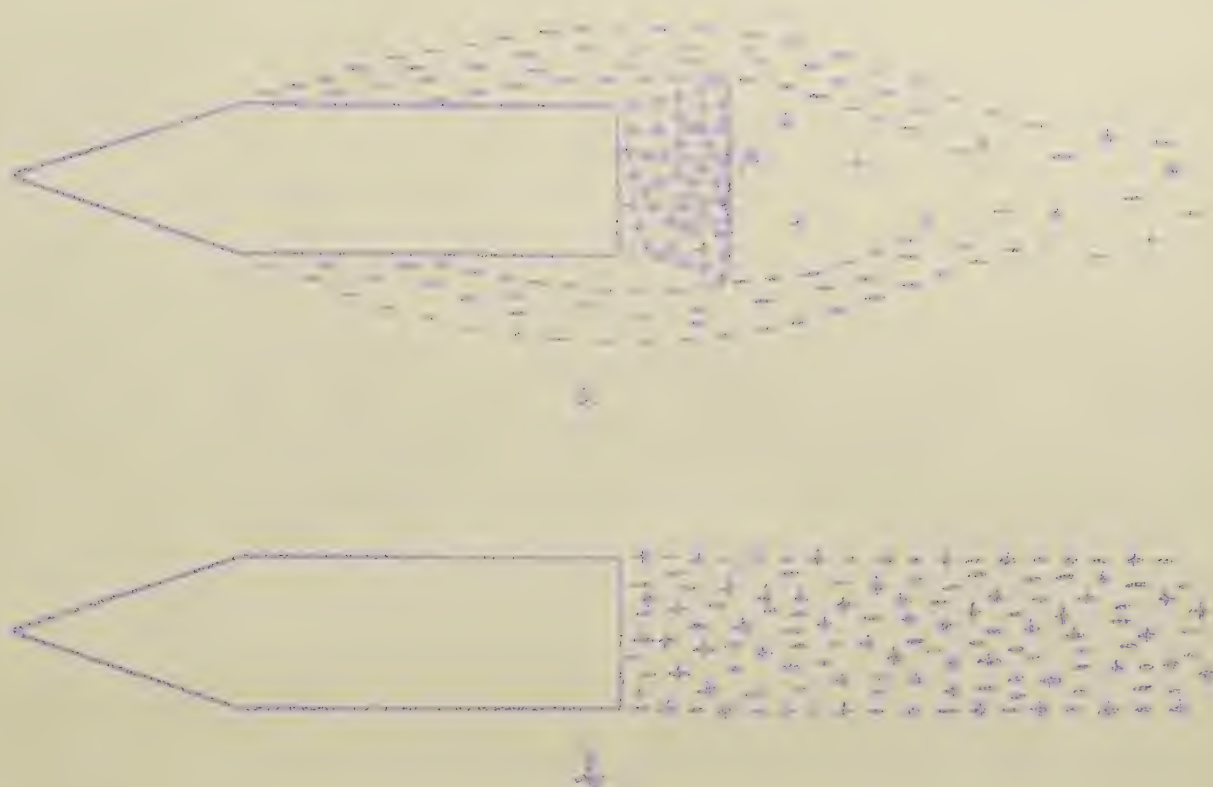


Figure 1 (a et b) a : neutralité globale en courant des faisceaux d'électrons et d'ions éjectés ($I = I_e + I_i = 0$) : une anode virtuelle A apparaît dans le faisceau d'ions avant que celui-ci soit neutralisé par les électrons qu'il attire. A réfléchit vers la fusée une grande partie des ions et la poussée est forte l'effacement réduit^(*).

(*) Les conditions d'apparition de cette anode virtuelle sont liées à l'ouverture relative R du faisceau d'ions à sa sortie de la fusée ($R = D/s, D$: diamètre du faisceau d'ions à la sortie de la fusée, s : distance d'accélération - entre la source d'ions S et l'électrode accélératrice - Une cathode virtuelle apparaît pour $R > 1$. En pratique, pour avoir une poussée intéressante, on a obligatoirement $R \gg 1$ (cf. e.g. [5]).

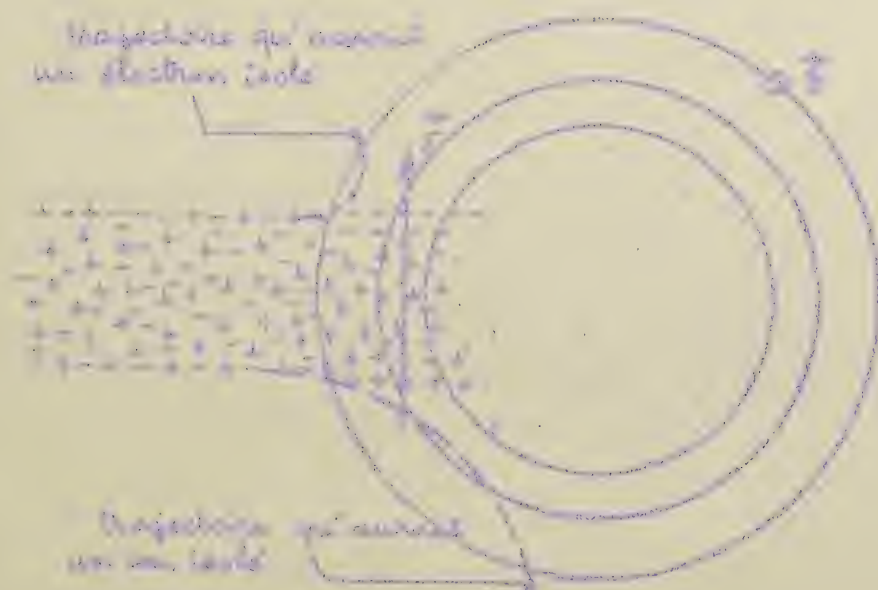


Figure 2 - Le faisceau d'ions neutralisé traverse la "paroi" de la bouteille magnétique et vient se détruire sur le plasma piégé dans la bouteille.

L'étude théorique de l'injection d'électrons noncollinéaires (vitesse initiale v_{e0}) dans un faisceau d'ions noncollinéaires (vitesse v_i) qu'il ne perturbe pas [6] [7], montre que, si l'on veut éviter l'apparition, dans le faisceau mélangé, d'une cathode virtuelle réfléchissant les électrons, il faut réaliser $v_{e0} \leq \sqrt{v_i}$. Cette condition étant satisfaite, le potentiel élec-

trique $V(y)$, les ions se trouvent allongés, les électrons ($N = 2\pi C_0 / \lambda_0$) avec $|V(y)| \leq V_0$ ($\pm V_0 = \frac{1}{2} \frac{m_e v_0^2}{e e_0}$ compte les électrons injectés) (fig. 3)

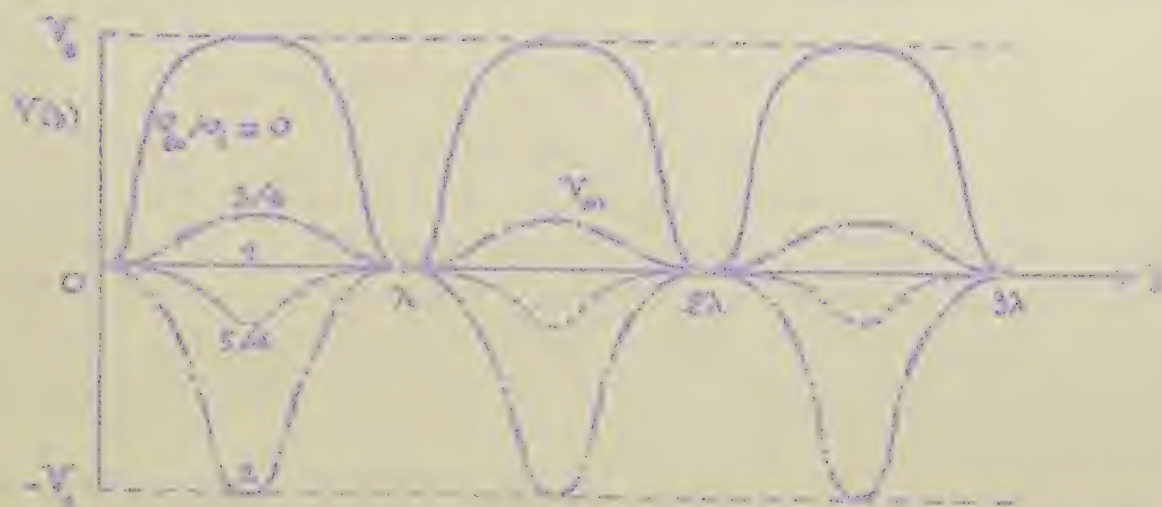


Fig. 3 - Variation du potentiel électrique $V(y)$ le long du faisceau rétrogradé ions - électrons (ions "light" à la vitesse v_0 ; électrons monocycliques $V_m = V_0(1 - v_0/v_0)$)

A l'extrémité d'où on $|V(y)| < V_0$ et avec $|V(y)| \ll V_0$ ($V = \frac{m_e}{2\pi} \frac{v_0^2}{e e_0}$)

l'effet d'onde virtuelle ($V(y) = V_0$) qui apparaît dans le faisceau d'ions seule est grande densité de courant (accrétant la réflexion des ions vers la source), est donc bien supprimé par l'injection d'électrons.

Pour des ions césium à 1 keV, $v_0 = 36$ km/s. Or, les électrons sont (sans qu'aucun potentiel externe soit appliqué) d'une cathode à $T_c = 1500^\circ \text{K}$ ont une vitesse moyenne due à l'agitation thermique de

En $\gamma = 0$, les ions ont des vitesses $\vec{w}_{i0} = \vec{w}_i (\gamma = 0)$ dont les composantes transverses ($w_{i0h}, w_{i0\theta}$) sont distribuées, comme dans la source, selon un spectre maxwellien (vitesses moyennes $v_{i0h} = v_{i0\theta} = 0$) à la température T_i ,

$$f(w_{i0h}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} (kT_i/m_i)^{1/2}} \exp\left(-\frac{w_{i0h}^2}{2kT_i/m_i}\right) dw_{i0h}$$

La distribution longitudinale w_{i0z} est elle, distribuée selon (cf. équation 4.1)

$$f(w_{i0z}) = \frac{1}{(2\pi)^{1/2} (kT_i/m_i)^{1/2}} \exp\left(-\frac{w_{i0z}^2}{2kT_i/m_i}\right) dw_{i0z}$$

A cette dernière distribution correspond la vitesse moyenne

$$v_{i0} = \langle w_{i0z} \rangle = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{kT_i}{m_i}\right)^{1/2} \{1 + \mathcal{D}_0(\frac{v_{i0}^2}{2})\}$$

$$\text{soit } v_{i0} = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \left(\frac{kT_i}{m_i}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad \mathcal{D}_0(x) = \frac{1}{2} \int_0^x \exp(-t^2) dt \quad (x_0 \text{ mesuré par rapport au centre de la distribution, d'origine } 0).$$

Dans les applications pratiques, on aura généralement $\tau_e \gg 1$

$$u \approx (2eV_e/m_e)^{1/2} \quad \left(\frac{u}{c} \approx \left(\frac{2eV_e}{mc^2} \right)^{1/2} \approx \frac{1}{30} \right)$$

car la vitesse thermique des électrons u est petite devant la vitesse d'entraînement (pour $eV_e = 1 \text{ keV}$, $\tau_e = 1$ correspondrait à $T_e \approx 10^7 \text{ OK}$!)

Pour les électrons, on a généralement $\omega_p \gg \omega_c$ (les distributions sont anisotropes) (pour un plasma froid, $\omega_p \gg \omega_c$ car la température des composantes transverses de $\vec{w}_{e0}$: w_{e0y} et w_{e0z}).

C'est à la vitesse d'entraînement u que les distributions sont anisotropes, mais que les électrons sont considérés comme isotropes.

Pour des électrons accélérés on a (on suppose $\omega_p \gg \omega_c$) :

$$f_{e0} \left[\left(\frac{2eV_e}{m_e} \right)^{1/2} < w_{e0y} < \left(\frac{2eV_e}{m_e} + \Delta w_{e0y} \right) \right] = \frac{e}{4\pi V_e/m_e} \cdot \frac{1}{2\pi\omega_p} \cdot \omega_{ce} \cdot \Delta w_{e0y}$$

avec une vitesse angulaire

$$\omega_{ce} = 2\omega_{ce0} = \sqrt{2} (\omega_{ce0}^2)^{1/2} \left[\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} e^{-\frac{\tau_e}{2}} (1 - \cos \tau_e) \right]$$

$$\text{ou } \tau_e = (eV_e/kT_e)^{1/2}$$

(3) : fonction d'erreur.

Les variations de ψ_{eq} en fonction de V_e sont représentées sur la figure 5 (courbe en trait plein).

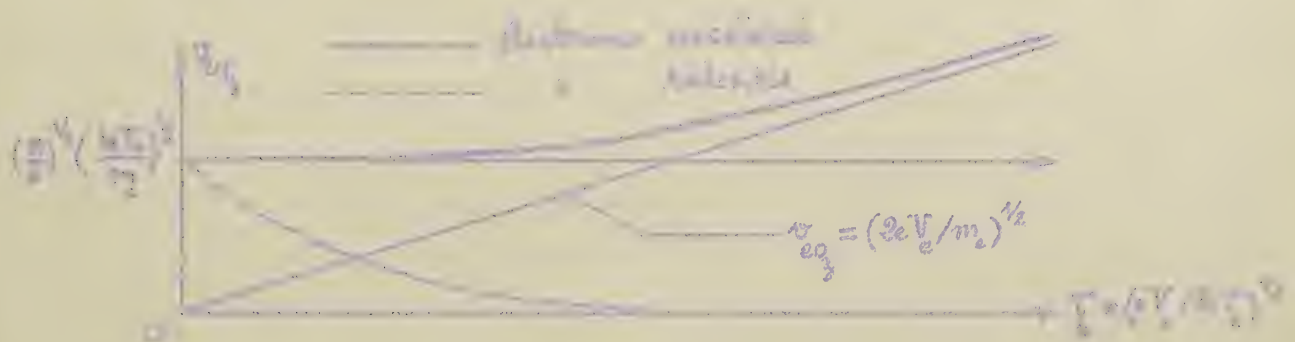


Figure 5

Pour $V_e \gg 1$, ψ_{eq} est $(2eV_e/m_e)^{1/2}$. La vitesse d'agitation thermique est alors petite, longuement en deçà de la vitesse d'équilibre.

Pour des électrons « froids », on a :

$$\hbar(\omega_{L_2} < \omega_2 < \omega_1 + \omega_{L_2}) = \frac{e}{hT_e/m_e} = \frac{eV_e/hT_e}{\omega_{L_2}^2/2[hT_e/m_e]} = \omega_{L_2}^2/h\omega_{L_2}$$

c'est la vitesse moyenne :

$$\begin{aligned}
 n_{e0} &= \langle n_{e0} \rangle = (\pi/2)^{1/2} [kT_e/m_e]^{1/2} e^{-eV_e/kT_e} \\
 &= (\pi/2)^{1/2} [kT_e/m_e]^{1/2} e^{-\tau_e^2}
 \end{aligned}$$

représentée (en tireté) en fonction de τ_e sur la figure 5.

4.2.2.- Mise en équations

Les équations d'évolution du faisceau mélangé sont :

. les équations de continuité

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \text{div}(n_e \vec{v}_e) = 0$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \text{div}(n_i \vec{v}_i) = 0$$

où $n_e(y, t)$ et $n_i(y, t)$ sont les densités, $v_e(y, t)$ et $v_i(y, t)$ les vitesses moyennes. Dans le système de révolution, $\vec{v}_e$ et $\vec{v}_i$ sont parallèles à Oy, et on a :

$$\frac{\partial n_e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(n_e v_e) = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial n_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial y}(n_i v_i) = 0 \quad (2)$$

. les équations de transport de la quantité de mouvement, de Fokker-Planck :

$$n_2 m_2 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} \right) + \text{div} \frac{\vec{v}}{t} + n_2 e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = -n_2 m_2 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

$$n_1 m_1 \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \vec{v} \cdot \text{grad} \vec{v} \right) + \text{div} \frac{\vec{v}}{t} - n_1 e (\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) = -n_1 m_1 (\vec{v}_1 - \vec{v}_2)$$

où ν désigne la fréquence moyenne des collisions électrons-ion :

$$\nu = \frac{\sqrt{2} n_2 e^4 (1/m_1 + 1/m_2) \ln \Lambda}{4\pi^{3/2} \epsilon_0^2 m_2^2 (\ln T_1/m_1 + \ln T_2/m_2)^{3/2}} = 3,8 \times 10^{-8} \frac{n_2 \ln \Lambda}{\left(\frac{T_1}{2} + \frac{m_2}{m_1} \frac{T_2}{2} \right)^{3/2}}$$

et $\frac{\vec{v}}{t}$ et $\frac{\vec{v}}{t}$ les pressions tensorielles.

Pour calculer ces densités, on suppose que, dans le faisceau mélangé ($\gamma \gg 0$), les lois de distribution des vitesses électrostatiques et ioniques gardent les formes qu'elles ont au niveau $\gamma = 0$ de l'injection (cf. ci-dessus). $\vec{v}_{10}$ et $\vec{v}_{20}$ étant remplacés par $v_1(t, t)$ et $v_2(t, t)$. Sur $\vec{v}_1 \otimes \vec{v}_1$ ($\vec{v}_1 = A, B, C, \vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ vecteurs unitaires radial, axial et azim), les composantes de $\frac{\vec{v}}{t}$ sont (cf. appendice A.1)

$$y) = \psi_1 \left(1 - \frac{y}{\alpha} \right)$$

où $\psi_1(\tau_1) = 2\tau_1^2 + 1 - \frac{2}{\pi} [1 + \mathcal{H}_0(\tau_1^2/2)]^2$ (τ_1 et α ayant les significations ci-dessus).

ψ_2 a deux expressions différentes selon que les électrons sont considérés comme relativistes; nous obtenons alors les deux expressions (3.4.2) et (3.4.3)

$$\psi_2 = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right)$$

$$\psi_2 = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right) = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right) \quad (3.4.3)$$

et nous obtenons

$$\psi_2 = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right)$$

et nous obtenons

$$\psi_2 = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right) = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right) \quad (3.4.4)$$

et nous obtenons

$$\psi_2 = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right) = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right)$$

$$\psi_2 = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right) = \psi_1 \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \right)$$

4. II

(a) On a le nombre de électrons introduits par seconde $I = n v_0 \pi R^2$ et $I = 0$, de qui il résulte que le nombre n d'électrons par cm² de surface est nul. Les effets magnétiques sont négligeables devant les effets électriques, le rayon $r = R$. On peut formuler cette condition en disant que l'énergie cinétique des électrons est plus grande que l'énergie magnétique :

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \gg \frac{1}{2} \mu_0 I^2 R^2$$

d'où

$$\frac{1}{4} e v_0^2 J \ll \frac{1}{2} m v_0^2 \quad \text{ou} \quad J \ll \frac{2 m v_0}{e h^2}$$

quel que soit $R < R_0$ dans $R_0 = \frac{2 m v_0}{e h^2}$ soit encore, en introduisant le courant $I = \pi R^2 J$:

$$I \ll \frac{2 \pi m v_0}{h^2}$$

ce sont évidemment les électrons qui vont introduire ainsi le magnétisme plus restrictive, d'où :

$$I \ll \frac{2 \pi m v_0}{h^2}$$

Supposons qu'on ait réalisé l'égalité des vitesses moyennes électronique et ionique :

$$\sqrt{\frac{2 e V}{m}} = \sqrt{\frac{2 e V}{M}}$$

La condition précédente s'écrit :

$$I \ll \frac{2 \pi m}{h^2} \sqrt{\frac{2 e V}{m}} \sqrt{\frac{M}{2 e V}} = \frac{2 \pi m}{h^2} \sqrt{\frac{M}{m}}$$

Pour des ions de résine ($M = 153$) de 1 keV, on a :

Avec (1) (2) (3) (4) on dispose de 4 équations, pour déterminer les 5 fonctions inconnues de $\vec{r}$ et t : $n_i, n_e, \phi, \vec{E}, \vec{B}$. Le système est fermé par l'équation de Gauss

$$\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial z} = e(n_i - n_e) \quad (5)$$

($\nabla \cdot \vec{B} = 0$ et $\nabla \cdot \vec{E} + \partial \vec{B} / \partial t = 0$) sont automatiquement vérifiées; l'équation d'Ampère enfile $\nabla \times \vec{B} = (1/c^2) \partial \vec{E} / \partial t = \mu_0 \vec{J}$ qui s'écrit ici, puisque $\vec{B} = 0$, $\epsilon_0 \partial \vec{E} / \partial t = -\vec{J}$ est une conséquence de (1) (2) et (5)).

En introduisant les grandeurs sans dimensions :

$$Z = \frac{z}{\lambda_D}, \quad T = \omega_p t, \quad u_i = \frac{v_i}{v_0}, \quad u_e = \frac{v_e}{v_0}, \quad \gamma_i = \frac{v_0}{v_{Ti}},$$

$$\bar{E} = \frac{E_0 \omega_p E}{e n_0 v_0}, \quad \bar{n}_{e,i} = \omega_{p,i}^2 / \omega_0^2, \quad \alpha = \omega / \omega_0, \quad \alpha_{e,i}^2 = \frac{1}{\gamma_i^2} \frac{k_B T_{e,i} / e}{\omega_{p,i}^2} (v_{Ti})$$

où n_0 et v_0 désignent une densité et une vitesse de référence ($\omega_{p,i}^2 = n_0 e^2 / \epsilon_0 m_i$), le système (1) (5) s'écrit :

$$\frac{\partial V}{\partial r} + (1+\lambda) \frac{\partial V}{\partial z} + (1+\mu) \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} + (1+\lambda) \frac{\partial V}{\partial z} + (1+\mu) \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

$$(1+\mu) \frac{\partial V}{\partial r} + (1+\mu)(1+\lambda) \frac{\partial V}{\partial z} + \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial \theta} + \lambda \frac{\partial V}{\partial \theta} (1+\mu) = 2\pi(1+\mu)(\lambda_0 + \lambda_1) \quad (2)$$

$$(1+\mu) \frac{\partial V}{\partial r} + (1+\mu)(1+\lambda) \frac{\partial V}{\partial z} + \alpha^2 \frac{\partial V}{\partial \theta} - \lambda \frac{\partial V}{\partial \theta} (1+\mu) = 2\pi(1+\mu)(\lambda_0 - \lambda_1) \quad (3)$$

$$\frac{\partial V}{\partial r} + (1+\lambda) \frac{\partial V}{\partial z} + (1+\mu) \frac{\partial V}{\partial \theta} = 0$$

Les conditions aux limites imposées par la nature physique du problème sont :

• Application 1 :

Courant total quittant la fusée nul en moyenne

Champ électrique nul à l'infini

• Application 2 :

Différence de potentiel nulle (ou constante) entre le

collecteur et l'émission

sur lequel on recueille le

faible courant

Ce sera plus loin, lors de la résolution, quelles conditions aux limites supplémentaires, relatives aux conditions de l'injection, il conviendra d'introduire pour éviter de déterminer des solutions

(x) Si le faisceau se détruit à l'interface d'une bouteille magnétique, ce si c'est "flottant" les conditions aux limites sont différentes. Il faudrait alors envisager l'impédance ramenée au niveau de 0.

On ne peut résoudre le système (1') (3') que moyennant des approximations.

La première consiste à le linéariser, c'est-à-dire à étudier de petits signaux $(u_1, u_2, h_1, h_2, E) \ll 1$. Cette approximation est d'ailleurs physiquement la plus intéressante : elle correspond à la condition $v_e \simeq v_i$ dont on a vu plus haut la nécessité.

4.3.- PETITS SIGNAUX

Faisant $n_0 = n_{i0}$ et $v_0 = v_{i0}$ (densité et vitesse moyenne ioniques en $y = 0$) ce qui entraîne $u_1 = 0$ et $h_2 = 0$, on suppose que $u_2 = v_{e0}/v_{i0} u_1$ et $h_1 = v_{e0}/v_{i0} h_2$ ($v_{e0} \ll 1$) ; autrement dit, en $y = 0$, la densité électronique est voisine de la densité ionique, la vitesse moyenne électronique est voisine de la vitesse moyenne ionique, c'est-à-dire que le faisceau mélangé est voisin de la neutralité en charge et de la neutralité en courant :

L'étude du système (1') ... (3') linéarisé :

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_2}{\partial t} + \frac{\partial u_2}{\partial z} + \frac{\partial h_2}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (1'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u_1}{\partial t} + \frac{\partial u_1}{\partial z} + \frac{\partial h_1}{\partial z} = 0 \end{array} \right. \quad (2'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_2}{\partial t} + \frac{\partial h_2}{\partial z} + \alpha_2^2 \frac{\partial u_2}{\partial z} + h_2 E = 2u_1(v_i - v_e) \end{array} \right. \quad (3'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial h_1}{\partial t} + \frac{\partial h_1}{\partial z} + \alpha_1^2 \frac{\partial u_1}{\partial z} - h_1 E = -2u_2(v_i - v_e) \end{array} \right. \quad (4'')$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial E}{\partial z} = u_1 - u_2 \end{array} \right. \quad (5'')$$

soit permises de répondre à la question suivante : les petites écarts à la neutralité introduits en $\gamma = 0$ se compensent-ils, s'équilibrent-ils ? (on peut se représenter la conservation du principe d'équilibre, ou bien avoir des atomes, les électrons perdus, au fur et à mesure qu'on s'éloigne de γ , vers la neutralité idéale $n_e \approx n_i$, $J \approx 0$?

Les vitesses moyennes $\bar{v}_e$ et $\bar{v}_i$ étant voisines, il n'y a pas d'amplification ou d'atténuation à observer du mécanisme à "instabilité à deux faisceaux" sous sa forme classique (sans agitation thermique). Les seuls mécanismes susceptibles de faire apparaître une amplification ou une atténuation sont :

- un couplage entre oscillations électroniques et ioniques dû aux agitations thermiques,

- un couplage entre deux modes de la distribution de vitesses électronique ou ionique. Comme ces distributions, sous leurs formes ci-dessus, sont unimodales, un tel couplage ne peut exister que s'il apparaît un deuxième mode, par réflexion d'une partie des électrons (ou des ions), c'est-à-dire si un champ électrique retardateur, à droite de 0, réfléchit les électrons ou les ions les plus lents,

- un mécanisme dissipatif lié aux collisions électron-ion

On va commencer par étudier les mouvements collectifs susceptibles de faire apparaître les mécanismes 1 et 2. On examinera ensuite le rôle des collisions.

4.3.1. Mouvements collectifs ; classification (collisions négligées)

La relation de dispersion $D(\gamma, \omega) = 0$ obtenue en cherchant au système (1^{re})... (5^{re}), dans lequel on a fait $\omega = 0$, des solutions en ω (cf. 4.2) s'écrit (une fois débarrassée de la solution parasite $\omega = 0$) :

$$D(k, \omega) = \left\{ (k - \omega)^2 - \lambda_e^2 k^2 - \lambda_i^2 \right\} \left\{ (k - \omega)^2 - \lambda_e^2 k^2 - \lambda_i^2 \right\} - \lambda_e^2 \lambda_i = 0$$

On voit qu'on a des ondes électroniques ($D_e(k, \omega) \equiv (k - \omega)^2 - \lambda_e^2 k^2 - \lambda_i^2 = 0$) et ioniques ($D_i(k, \omega) \equiv (k - \omega)^2 - \lambda_e^2 k^2 - \lambda_i^2 = 0$) couplées par le terme $\lambda_e \lambda_i$.

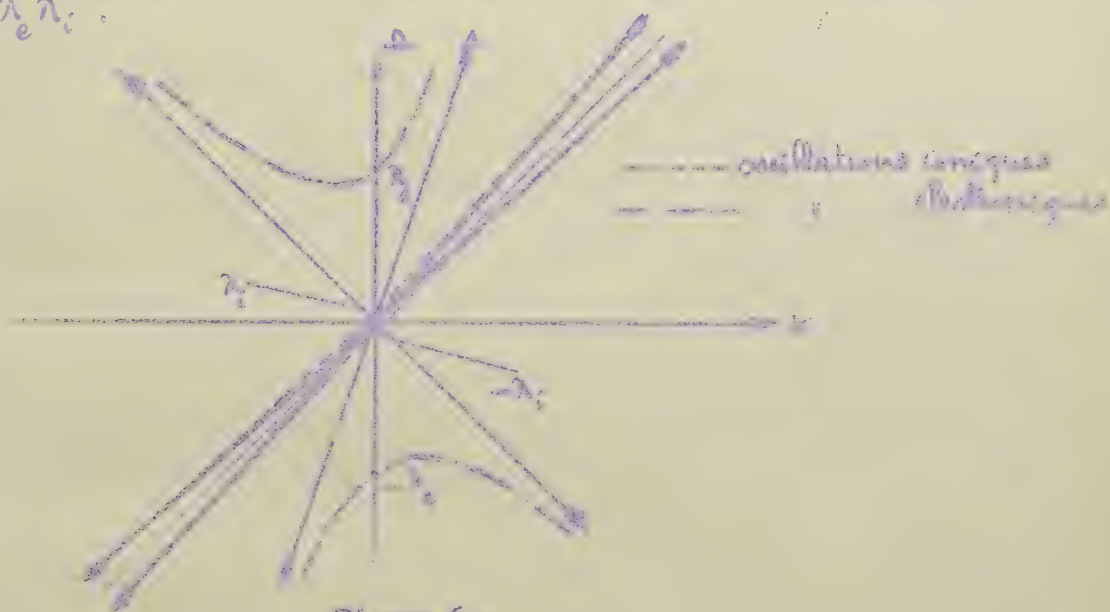


Figure 6

Les courbes $D_e(k, \omega) = 0$ et $D_i(k, \omega) = 0$ sont des hyperboles ayant pour asymptotes les droites $\omega = (\pm \lambda_e)k$ et $\omega = (\pm \lambda_i)k$ respectivement (fig. 6). Le couplage entre oscillations électroniques et ioniques n'est important que si les courbes D_e et D_i se coupent ou se rapprochent l'une de l'autre.

Comme $\lambda_e \ll \lambda_i$ ($\lambda_e \gg 1$, $\lambda_i \ll 1$) ceci ne se produit que si $\omega \gg \omega_i$. Pour les applications FI on a toujours $\omega \gg \omega_i$ et par conséquent le couplage entre oscillations électroniques et ioniques dû

Les oscillations thermiques des électrons ϵ ont une fréquence moyenne de l'ordre de 10^{12} Hz. Elles s'ajoutent au mouvement des électrons par l'oscillation d'oscillation.

$(\vec{v}_e(t, \vec{r})) \neq 0$ représente des ondes progressives - à tout K réel correspond un ω réel et vice versa - comme $\vec{v}_e(t, \vec{r}) \neq 0$ on aura donc $\omega(\vec{K}) \neq 0$.

Pour les applications 4.1 au contraire, il est possible que dans certains cas on ait $\omega(\vec{K}) = 0$. Le couplage peut alors entraîner la destruction du faisceau par des effets d'énergie - thermique - sur les oscillations électroniques.

On va supposer désormais que $\omega(\vec{K}) \neq 0$. Le faisceau d'électrons a une fréquence ω_e et on peut se limiter à l'étude des oscillations électroniques.

Pour décrire le mouvement des électrons (oscillations, oscillations, oscillations) on peut appliquer la théorie de la mécanique quantique. Pour cela, on utilise la figure 7. On voit que $\vec{K}$ réel et ω réel, les 2 branches correspondant à une même fréquence ω d'oscillation.

Pour $\omega_e = \omega$ le mouvement de dispersion $\omega(\vec{K}) = \omega_e$ a l'allure de la figure 7.



Figure 7

A tout K réel correspond un Ω réel et vice-versa, les oscillations électroniques sont donc progressives.

L'atténuation, pour $\alpha_e > 1$ ne peut provenir que du mécanisme de Landau (cf. chapitre 3). Il est intéressant de voir dans quelles situations physiques on obtient $\alpha_e < 1$ ou $\alpha_e > 1$.

α_e est défini par :

$$\alpha_e = \frac{1}{2} \frac{bT_e}{v_{to}^2} \frac{1}{m_e} \left(\frac{v_{to}}{v_{so}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{bT_e}{v_{so}^2} \frac{1}{m_e} e^{(v_{to}/v_{so})^2}$$

Il y a deux opérations différentes pour calculer α_e : la première est de calculer α_e pour des électrons accélérés entre K et G , la seconde est de calculer α_e pour des électrons accélérés entre G et K .

• Electrons accélérés entre K et G

$$\alpha_e = \frac{1}{2} \frac{bT_e}{v_{so}^2} \frac{1}{m_e} \left(\frac{v_{to}}{v_{so}} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{\pi e^2}{kT_e} \frac{v_{to}^2}{v_{so}^2} \left[1 - \frac{v_{to}^2}{v_{so}^2} \right]^{-1} \left[1 - \frac{v_{to}^2}{v_{so}^2} \right]^{-1}$$

On peut voir que α_e est une fonction décroissante de $\frac{v_{to}}{v_{so}}$ (cf. chapitre 3) et qu'elle tend vers 1 pour $\frac{v_{to}}{v_{so}} \rightarrow 0$.

$$\alpha_e = \frac{1}{2} \frac{\pi e^2}{kT_e} \frac{v_{to}^2}{v_{so}^2} \left[1 - \frac{v_{to}^2}{v_{so}^2} \right]^{-1} \left[1 - \frac{v_{to}^2}{v_{so}^2} \right]^{-1}$$

On a donc toujours $\alpha_e > 1$ et les oscillations sont progressives.

Electrons ralentis entre K et G :

$$\alpha_e = \frac{v_e^2}{v_{\omega_h}^2} \frac{kT_e}{m_e} \delta(\tau_e) = \frac{20 \frac{eV}{k} (1 - \frac{1}{2} e^{-\tau_e^2})}{\frac{\pi}{2} e^{-\tau_e^2}} = \frac{4}{\pi} \delta \frac{eV}{kT_e}$$

α_e est une fonction croissante de τ_e : minimale pour $\tau_e = 0$:

$$\alpha_e(0) = \alpha_e(0) = \left[\frac{4}{\pi} - 1 \right]^{1/2} \simeq 0,52 < 1$$

$$\alpha_e(\tau_e) > 1 \text{ pour } \tau_e > (\ln \pi/2)^{1/2} \simeq 0,67$$

Dans les applications (1), où on est obligé de ralentir les électrons entre K et G, on aura presque toujours $\tau_e > 0,67$. ainsi pour ralentir des électrons émis par une cathode à $T_e = 1500^\circ K$, de manière à ce qu'ils possèdent dans le faisceau mélangé une vitesse moyenne égale à la vitesse d'ions osmium à 1 keV ($v_{\omega_h} = v_{\omega_i} = 38 \text{ km/s}$), il faut une différence de potentiel retardatrice V_e telle

$$v_{\omega_h} = (nA)^{1/2} [kT_e/m_e]^{1/2} e^{-\tau_e^2/2} = 38 \text{ km/s} \quad \left(\tau_e^2 = eV_e/kT_e \right)$$

d'où $\left(v_{\omega_h} = (nA)^{1/2} [kT_e/m_e]^{1/2} \right) = 190 \text{ km/s}$, vitesse moyenne d'origine thermique - ou l'absence de potentiel retardateur

$$e^{-\tau_e^2/2} = \frac{190}{38} = 5 \quad \text{et} \quad \tau_e = 4,77 > 0,67$$

En résumé, dans les applications 1-3 où l'on considère les électrons entre K et 0, on aura $\omega_p < 1$ et des oscillations électroniques progressives. Tandis que dans les applications 4-5 où l'on considère les électrons entre 0 et K, on aura $\omega_p > 1$ et des oscillations électroniques amorties.

On va maintenant étudier plus en détail les oscillations électroniques (qui sont les oscillations au premier ordre de perturbation des électrons) dans le référentiel (K) entrainé à la vitesse $v = v_0$. La relation de dispersion, $D(\omega, k) = 0$ prend la forme $(\omega - k v_0)^2 - \omega_p^2 = 0$

$$D(\omega, k) = (\omega - k v_0)^2 - \omega_p^2 = 0$$

soit, en passant aux variables réelles ω, k, v_0 et ω_p

$$\omega^2 - \frac{k T_0}{m} k^2 - \omega_p^2 = 0$$

qui est la relation de dispersion classique pour les ondes de plasma électroniques (cf. e.g. Denise, Delcroix [8]).

4.3.2 - Oscillations électroniques

A) $\omega_p < 1$ (Applications 1-3)

La relation de dispersion $D(\omega, k) = (\omega - k v_0)^2 - \omega_p^2 = 0$ ($\omega_p = \omega_p / \omega_0 < 1$), ou la remplacera désormais par 1) possède, en tant qu'équation en K, 2 racines réelles :

$$K_1 = \frac{\omega_1}{1 - \alpha_e^2} + \frac{\sqrt{1 - \alpha_e^2 + \alpha_e^2 \omega_1^2}}{1 - \alpha_e^2}$$

$$K_2 = \frac{\omega_2}{1 - \alpha_e^2} - \frac{\sqrt{1 - \alpha_e^2 + \alpha_e^2 \omega_2^2}}{1 - \alpha_e^2}$$

correspondent à 2 ondes de plasma électromagnétiques progressives (pour $\Omega > 0$), $\omega_1, \omega_2 > 0$: les vitesses de phase sont donc toutes deux positives; pour $\Omega < 0$, $\omega_1 > 0, \omega_2 < 0$, la vitesse de phase de l'onde aux ondes est égale à $-v$, mais les vitesses de groupe sont toutes deux positives.

On a

$$u_e(z, \tau) = u_1 e^{i(\Omega t - K_1 z)} + u_2 e^{i(\Omega t - K_2 z)}$$

les amplitudes u_1 et u_2 des deux ondes étant déterminées par les deux conditions :

$$\Delta V_g = V_1 - V_2 = -\frac{1}{2} \delta \phi / \delta x = 1$$

(différence de potentiel nulle entre grille 3 et collecteur $\delta \phi / \delta x = 0$) est lié à ω_1, ω_2 par $\omega_1 = \omega_2$ (1)

$$u_2(z, \tau) = u_1(z, \tau) = u_1 e^{i(\Omega t - K_1 z)} \quad (\text{à cause de la neutralité})$$

est en charge au niveau de la grille modale à la pulsation Ω .)

Si $\Omega > 0$ (la condition $\omega_1 = \omega_2$ condition qui, en pratique, sera toujours satisfaite), le faisceau relié au collecteur en moyenne $\omega_1, \omega_2 > 0$

satisfait automatiquement la première condition. On peut donc imposer traditionnellement, l'une de l'autre, en G, des écarts à la neutralité, en charge $\rho_0(z, \tau) = \rho_0(z) \exp(i\omega\tau + \varphi)$ et en courant $i_0(z, \tau) = i_0(z) \exp(i\omega\tau + \varphi)$.

phéage arbitraire) et on trouve finalement (x)

$$\rho_0(z, \tau) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \rho_0(z) \exp(i\omega\tau + \varphi) \exp(-ik_z z) dk_z \left[\cos(\omega\tau - k_z z + \varphi) - \cos(\omega\tau + k_z z + \varphi) \right] + \frac{\omega^2 - 1}{\omega} i_0 \left[\cos(\omega\tau - k_z z + \varphi) - \cos(\omega\tau + k_z z + \varphi) \right]$$

On a donc un faisceau planif stationnaire, neutralisé en moyenne et neutralisé en tout point de manière approchée ($\rho_0(z, \tau) = -i_0(z, \tau)$).

En régime permanent ($\omega \gg 1$) on a $\rho_0(z, \tau) = -i_0(z, \tau)$ obligatoirement.

$$\rho_0(z, \tau) = -i_0(z, \tau) \exp(i\omega\tau + \varphi)$$

$$i_0(z, \tau) = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 - 1}} \rho_0(z, \tau) \exp(i\omega\tau + \varphi)$$

fonction périodique (dans l'espace), de longueur d'onde (λ)

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \sqrt{1 - \alpha^2}$$

$u_z(z, t)$, écart à la neutralité en charge dans le faisceau mélangé, est donc périodique avec la longueur d'onde :

$$\lambda = \frac{2\pi c}{\omega} \sqrt{1 - \alpha^2}$$

(si on fait $\alpha \ll 1$ l'expression ci-dessus - introduction -).

La figure 5 représente les variations de λ en fonction de α (pour une valeur moyenne des paramètres, pour un faisceau de caractéristiques usuelles).

$$\omega = 10^{14} \text{ s}^{-1}$$

$$T_0 = 250 \text{ } 000 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$T_1 = 1 \text{ } 500 \text{ } ^\circ\text{K}$$

$$(\omega_p = 500 \text{ } 000 \text{ s}^{-1}, \quad \alpha = 0.1 \text{ (voir)})$$

B) $\alpha > 1$ (applications 91)

La relation de dispersion $D(\omega, \alpha) = 0$ est une équation du 2^e degré en ω^2 à coefficients deux racines K réelles :

(X) Il s'agit dans (91) (référentiel, entraîné à la vitesse v par rapport au référentiel (M) du laboratoire - cf. ci-dessus - où le plasma est immobile, i.e. - à une vitesse d'entraînement nulle) d'une onde de plasma électronique de vitesse de phase réduite $\omega/\omega_p = \omega'/\omega_p$ (cf. (91) i.e. de vitesse de phase $\omega/\omega_p = \omega'/\omega_p$ et de pulsation réduite $\omega/\omega_p = \omega'/\omega_p$ - cf. (91) de pulsation $\omega/\omega_p = \omega'/\omega_p$).

Variations de la période λ et de la distance d'amortissement ℓ de $n_e(z)$ ou $U(z)$ en fonction de l'énergie des ions pour un faisceau de protons: $n_i = 10^{14} \text{ m}^{-3}$, $T_i = 230.000^\circ \text{ K}$ (20 eV), $T_e = 1500^\circ \text{ K}$

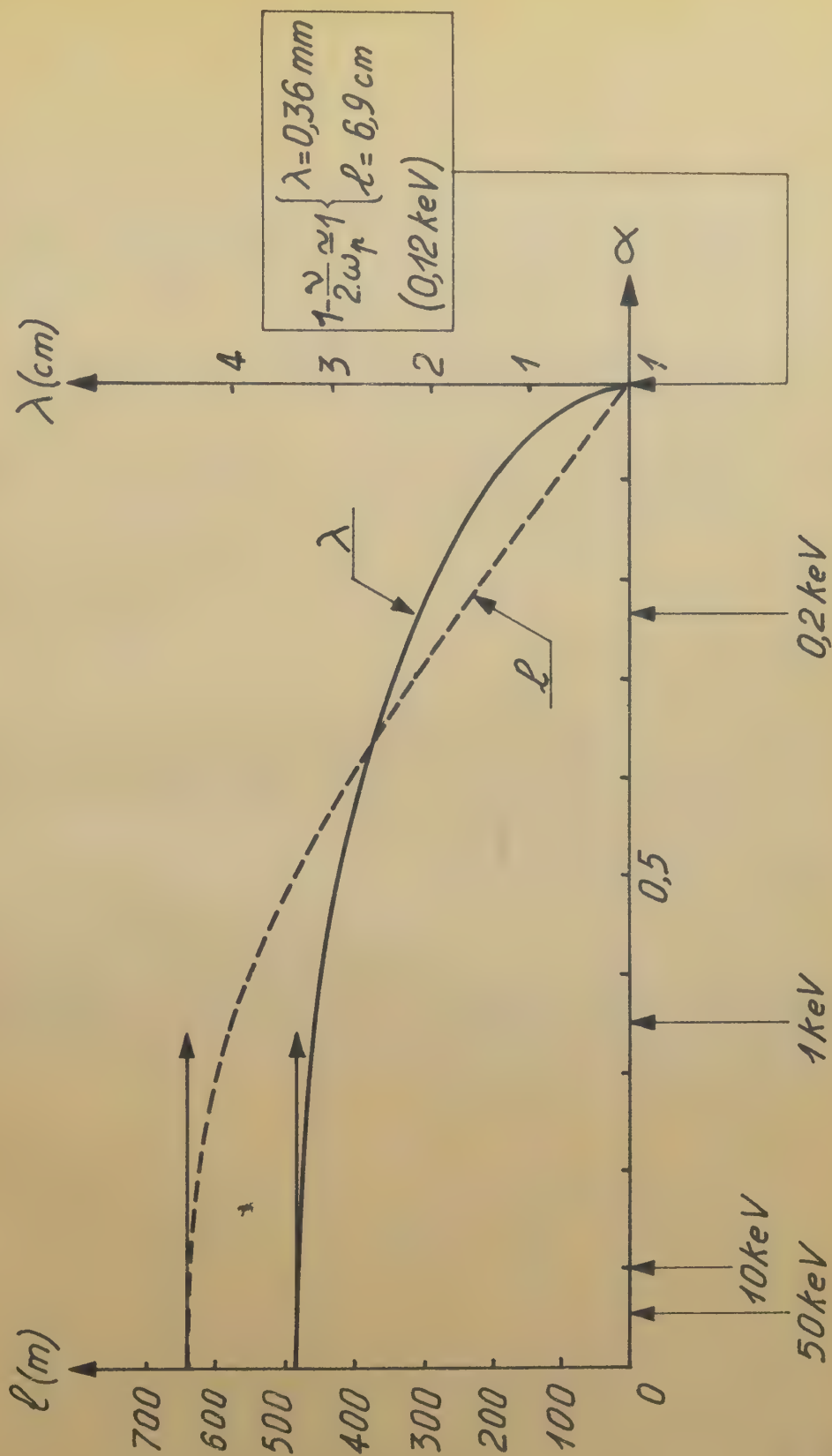


Fig. 8

Proof. Let $\alpha = \sqrt{a/b}$.

[illegible]

Examinons plus en détail le cas de $\frac{1}{\sqrt{2}}$. (C'est le régime

$$\begin{aligned} \tilde{G}_1(\sigma, \tau) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \} \\ \tilde{G}_2(\sigma, \tau) &= \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \} \end{aligned}$$

As

4.3.3.- Amortissement dû aux collisions.

Dans les régimes de neutralisation forcée, il est beaucoup moins important que l'amortissement macroscopique qu'on vient d'étudier, et peut par conséquent être négligé.

C'est au contraire, dans le cas de la neutralisation libre, le seul mécanisme d'amortissement et il est intéressant d'en déterminer l'importance.

Il faut pour cela reprendre la résolution du système (1'), ..., (5') en tenant compte de la collision avec les ions (cf. 4.3.1) et de la collision avec les électrons (cf. 4.3.2).

On trouve (cf. appendice 4.4) que toutes les expressions ci-dessus (dans le cas $k_e, \alpha_e < 1$ où on a toujours neutralisation libre) doivent être corrigées par les termes d'amortissement

$$- \left[\frac{\gamma}{1 - \alpha_e^2} \right] \left[1 + \frac{\alpha_e^2 \omega}{\sqrt{1 - \alpha_e^2 + \alpha_e^2 \omega^2}} \right] z$$

pour les termes

$$\frac{1}{\omega} \left[\frac{\gamma}{1 - \alpha_e^2} \right] \left[1 + \frac{\alpha_e^2 \omega}{\sqrt{1 - \alpha_e^2 + \alpha_e^2 \omega^2}} \right] z$$

pour les termes

$$\frac{1}{\omega} \left[\frac{\gamma}{1 - \alpha_e^2} \right] \left[1 + \frac{\alpha_e^2 \omega}{\sqrt{1 - \alpha_e^2 + \alpha_e^2 \omega^2}} \right] z$$

La dérivée partielle d'amortissement est donnée par

$$\frac{\partial}{\partial \omega} \left[\frac{\gamma}{1 - \alpha_e^2} \right] \left[1 + \frac{\alpha_e^2 \omega}{\sqrt{1 - \alpha_e^2 + \alpha_e^2 \omega^2}} \right] z$$

La figure 8 représente les variations de λ en fonction de l'énergie des ions pour le faisceau de protons mélangé ayant les caractéristiques ci-dessus (cf. 4.3.2., A). On voit que, pour la densité relativement modeste de 10^{14} ions/m³, λ est de l'ordre de la centaine de mètres. Pour les densités de quelques 10^{17} m⁻³ que l'on espère obtenir dans ce genre d'expériences, λ sera de l'ordre du centimètre : c'est à dire que l'amortissement dû aux collisions sera très important.

4.4. LES AUTRES MÉCANISMES D'INSTABILITÉ NON-LINEAIRES

On suppose maintenant que les écarts relatifs à la neutralité en charge $n_{\alpha}/n_{\alpha 0} - 1$ et à l'égalité des vitesses $v_{\alpha 1}/v_{\alpha 0} - 1$ ne sont plus petits, mais quelconques.

Aux trois mécanismes ci-dessus (l'instabilité de deux faisceaux, on a vu que, dans le cas des petits signaux, ils sont toujours atténuants), vient maintenant se joindre un quatrième : le mécanisme d'instabilité à deux faisceaux.

En l'absence d'excitation externe on voit que le système de dispersion homogénéisé ne se résout pas. L'allure de la figure 11, les points en tirets correspondant, à l'absence de collision de résonance à une seule particule.

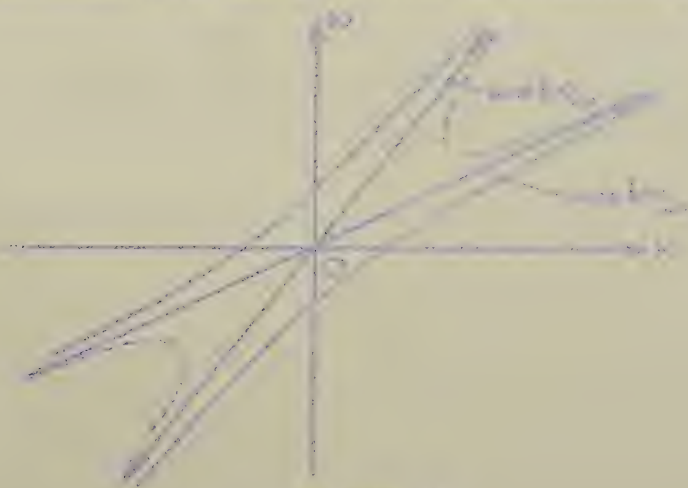


Figure 11

fiées - ou à des instabilités convectives - .

L'équilibre thermique (isothermique et isaque) entraîne une "suppression" de cette courbe (Sturrock [11]).

Il importe de noter, aux faibles fréquences (et en particulier en régime permanent $\omega = 0$), la présence d'instabilités à deux branches provoquant l'apparition d'ondes de charge d'espèces amplifiées qui entraînent la destruction du plasma homogène, par séparation de charge, à une certaine distance de $z = 0$.

Pour savoir de quel côté on se trouve des microondes 2 et 3, il faut résoudre le système des équations électromagnétiques (1'), (3') et (5') (sous la forme $\partial \tilde{E} / \partial z = -u_z$). Ce système non-linéaire a été résolu par ordinateur analogique ANALAC dans le cas particulier du régime permanent ($\omega = 0$) où il se réduit à l'équation :

$$(1+u_e) \left[\alpha^2 (1+u_e) - 1 \right] \frac{d^2 u_z}{dz^2} + [3 - \alpha^2 (1+u_e)] \left(\frac{du_z}{dz} \right)^2 - \varepsilon \alpha (1+u_e)^2 \frac{du_z}{dz} - u_e (1+u_e)^4 = 0$$

Dans le plan $(\alpha, \beta = v_e/v_i)$ le domaine de la neutralisation libre, où on a des ondes électromagnétiques progressives, amorties seulement par les collisions et un triangle virtuel (fig. 12) défini par :

$$v_e < \beta < 2/(1+\alpha_e) \quad \text{est} \quad \alpha_e v_e < v_{ce} < 2\gamma/(1+\alpha_e)$$

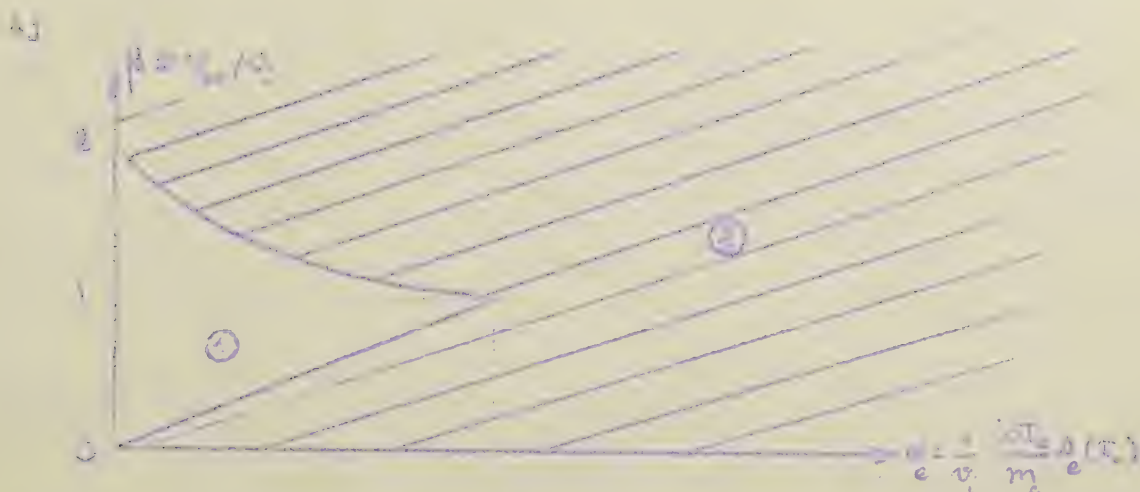


Figure 12.- Domaine de la neutralisation "libre" (1), où on a des oscillations électroniques progressives, excitées uniquement par les collisions, (2) neutralisation forcée (avec réflexion d'une partie des électrons ou des ions).

Dans le cas particulier $\beta = 0$ (injection d'électrons monoénergétiques), on retrouve la condition $0 < v_i / v_e < 2$ indiquée dans l'introduction.

Lorsque les collisions sont négligeables ($\beta = 0$), la variation de ω_r (et donc de la densité électronique $n_e = n_i (1 + \beta)$), en fonction de α dans le faisceau mélangé, a l'allure représentée sur la figure 13 a (cas particulier $\alpha = 0,5$). Pour $|\alpha| \ll 1$, on retrouve la similitude de la théorie linéaire. Lorsque ω_r croît en valeur absolue, se rapprochant de l'une de ses bornes, supérieure positive $\omega_{r+} = \frac{\beta}{\alpha} - 1$ (qui correspond

à $\alpha = \frac{\beta}{\omega_r + 1}$) ou inférieure négative $\omega_{r-} = -\frac{1 + \alpha}{\alpha}$

(qui correspond à $\alpha = -\frac{1}{\omega_r + 1}$), la courbe $\omega_r(\alpha)$ présente des maxima et des minima. La période décroît légèrement avec β pour α donné.

La figure 13b montre pour $\alpha_e = 0,1$ et de petites valeurs de U_{e0}

Les figures 13 c et d montrent que le rôle des collisions devient plus important quand, à α_e constant, U_{e0} croît, ou quand, à U_{e0} constant, α_e se rapproche de 1, donc d'une manière générale, quand les phénomènes non-linéaires deviennent plus importants.

4.5 CONCLUSION.

Cette étude théorique montre la possibilité de réaliser, par injection dans un faisceau d'ions, de vitesse moyenne U_i , d'électrons de vitesse moyenne $U_e \approx U_i$, un faisceau neutralisé, stable.

Dans les applications à la fusion contrôlée (injection d'un faisceau d'ions dans un plasma, par exemple), la stabilité du faisceau est essentielle. Il faut, pour cela, que les conditions de stabilité soient satisfaites. On a vu que la stabilité dépend de la vitesse, de la densité et de la température du plasma. On peut donc, en choisissant les conditions de stabilité, obtenir un faisceau stable. La stabilité du faisceau dépend aussi de la stabilité du plasma. On peut donc, en choisissant les conditions de stabilité, obtenir un faisceau stable.

Dans les applications à la propulsion spatiale, la stabilité du faisceau est essentielle. Il faut, pour cela, que les conditions de stabilité soient satisfaites. On a vu que la stabilité dépend de la vitesse, de la densité et de la température du plasma. On peut donc, en choisissant les conditions de stabilité, obtenir un faisceau stable. La stabilité du faisceau dépend aussi de la stabilité du plasma. On peut donc, en choisissant les conditions de stabilité, obtenir un faisceau stable.

la possibilité de choisir un tel régime au niveau de l'injection sans être influencé par les phénomènes de la zone d'injection, on a un faisceau de plasma, neutre en tout point.^(x)

- - - - -

(x) Une étude expérimentale de ces phénomènes (dans les deux cas FC et FI) est en cours, sous la direction de H. Leboucq, au Département Grandes Energies de la C.S.F. à Corbeville, [1-].

4.- BIBLIOGRAPHIE

- [1] R.S. DETZ, R.D. EHRSON, E. STROHMEIER : "Present status of the beam neutralization problem". ARS Electrostatic Propulsion Conf., Monterey (1960).
- [2] G.R. BREWER et al., : P.I.R.E., 19, 1789 (1961).
- [3] H. LEBOUTET : Brevet français, Rapports C.S.F. sur le contrat Eclair-CEA n° CSF 2847 (1959 et la suite).
- [4] J.M. DOLIQUE : Rapport C.S.F. WR.645 (1961) (non publié).
- [5] J.L. DELCROIX, D. QUEMADA : Rapport L.P. II (1961) (non publié).
- [6] H. MINELS, W. ROSENBAUM : "Analysis of one-dimensional ion-rocket with grid neutralization", NASA TN-D-266 (1960).
- [7] G.C. BALMAIN : "Neutralization of ion beams for propulsion by electron trap formation". ARS Electrostatic Propulsion Conf., Monterey, (1960).
- [8] J.M. DOLIQUE : Comptes Rendus Ac. Sc., 253, (1961), 818 : 253, (1961), 1091 ; 253, (1961), 1414.
- [9] J.M. DOLIQUE : Conférence sur la physique des plasmas et la recherche concernant la fusion nucléaire contrôlée, (A.I.W.A.), Salisbourg, (1961), CN-10/89 ; (Actes à paraître dans Nuclear Fusion).
- [10] J.F. DENISSE, J.L. DELCROIX : "Théorie des ondes dans les plasmas", Dunod, PARIS (1961).
- [11] P.A. STURROCK : Phys. Rev., 117, 1426 (1960).
- [12] H. LEBOUTET, J. REGNIER, J.M. DOLIQUE, G. VINCENT : Rapports C.S.F. WR.562 (1960) (non publié).

$$\alpha = 0,5$$

$$\chi = 0$$

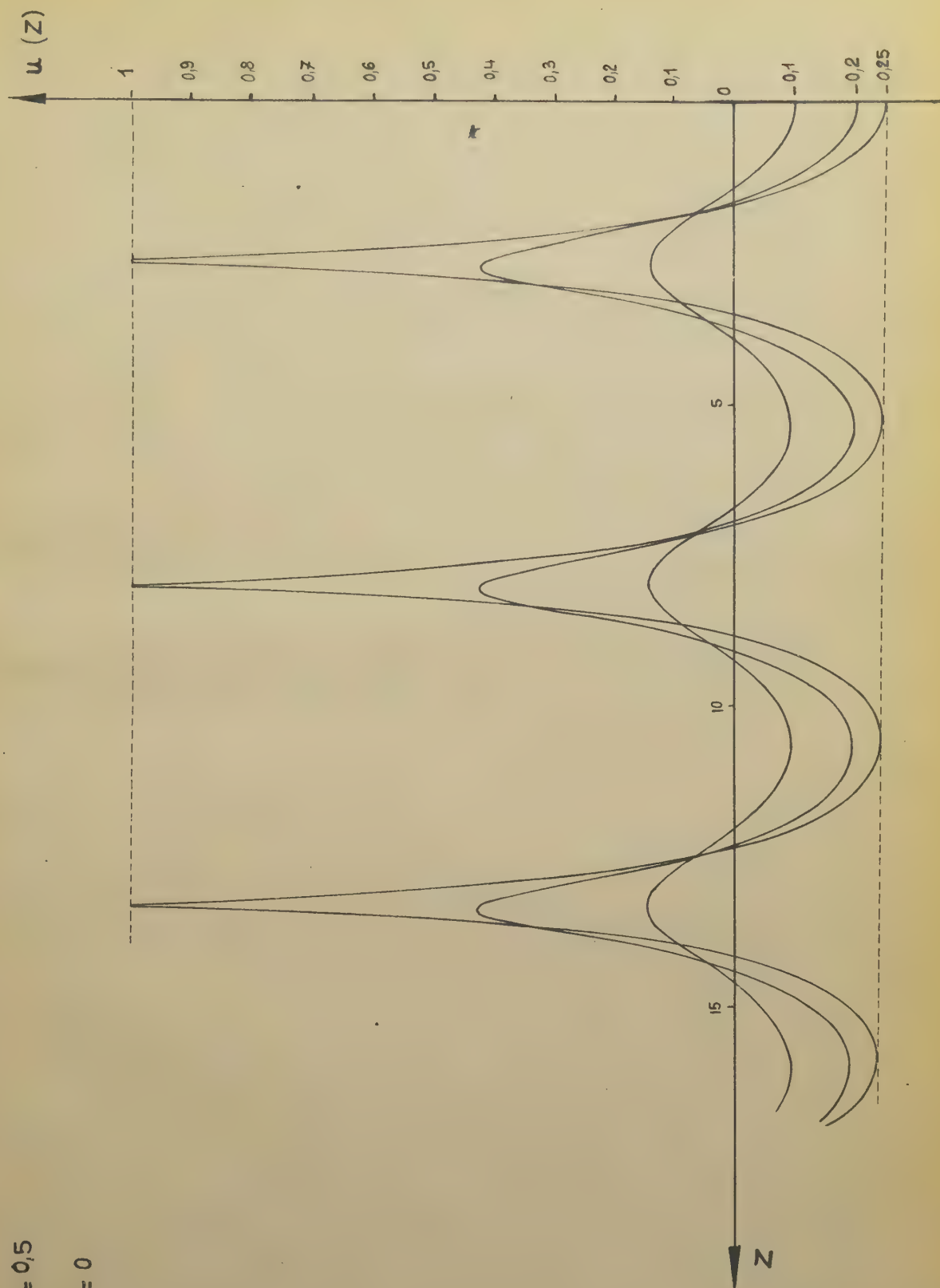


Fig. 13 a

$$\alpha = 0,1$$

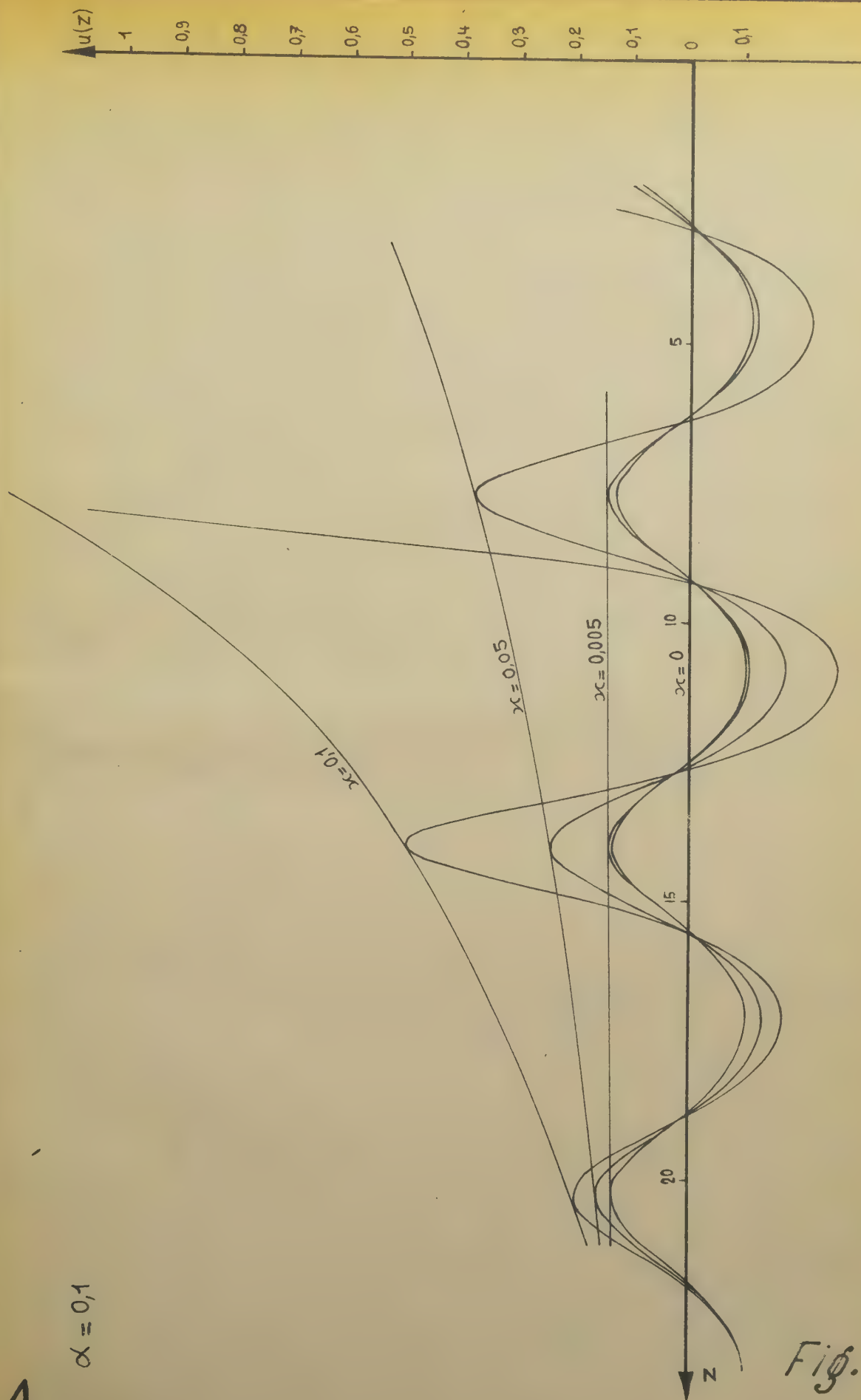


Fig. 13 b

$$\alpha = 0,1$$

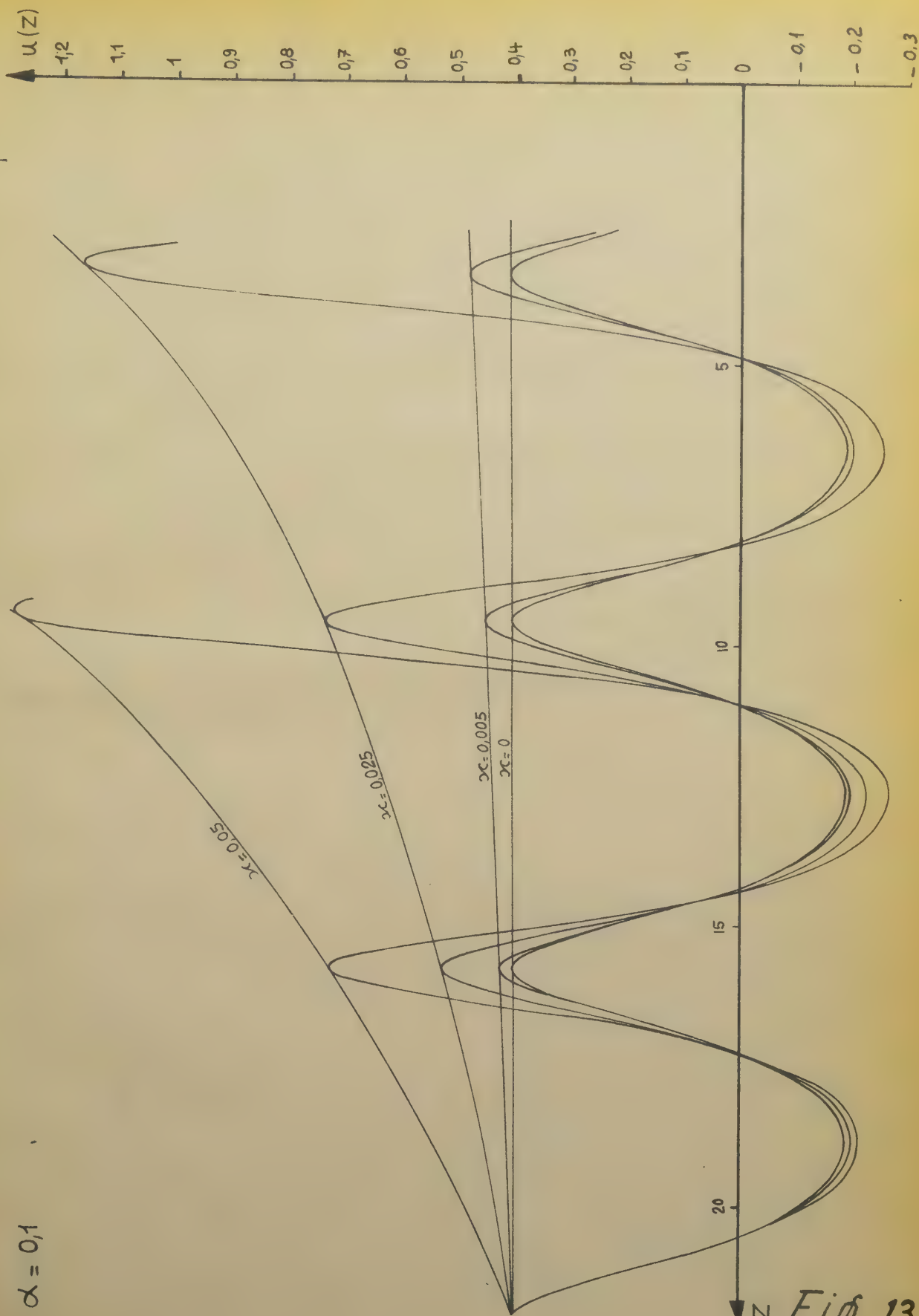


Fig. 13c

$$\alpha = 0,8$$

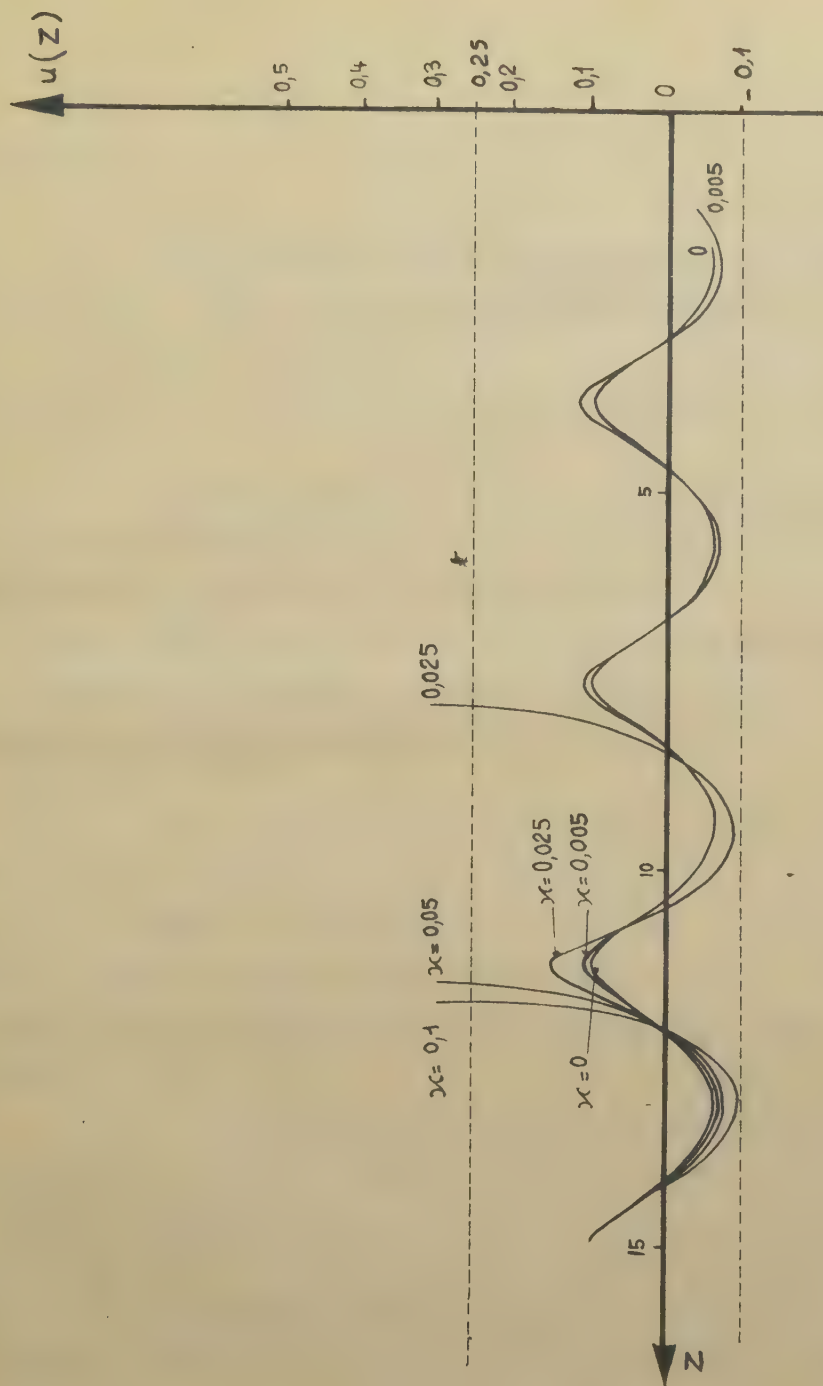


Fig. 13 d

CONCLUSION

Les collisions dans les plasmas complètement ionisés et leur description à l'aide de l'équation de Fokker-Planck ont fait l'objet d'un très grand nombre de travaux et de publications. On a tenté dans un premier chapitre de résumer les résultats les plus importants et de les ordonner.

On commence par rappeler la distinction, dans les plasmas, entre mouvements individuels et mouvements collectifs, interactions lointaines et interactions proches (ou collisions). Lorsque la vie du plasma est longue, les mouvements individuels (liés aux collisions) ne sont pas négligeables devant les mouvements collectifs. On dispose pour les décrire d'une équation approchée, l'équation de Fokker-Planck (F P).

Après avoir retracé les origines physique (mouvement brownien) et mathématique (chaînes de Markov) de cette équation, on en vient à son application aux plasmas. Les études récentes dans ce domaine font apparaître l'équation F P comme deuxième approximation des équations cinétiques rigoureuses, la première étant l'équation de Vlasov, qui ne rend compte que des mouvements collectifs.

L'équation F P contient deux coefficients (de ralentissement et de diffusion) qui dépendent de l'état du plasma. Les expressions générales dues à Rosenbluth, Mac Donald et Judd, de ces deux coefficients permettent d'appliquer l'équation F P à un plasma hors d'équilibre thermodynamique, et en particulier - moyennant une légère extension que nous avons introduite - à un plasma où les températures électronique et ionique sont radicalement différentes.

Malgré de ses deux coefficients (calculés comme il vient d'être dit), l'équation F F se présente sous une forme mathématique extrêmement compliquée, inexploitable presque toujours. Une méthode approchée (description à plusieurs fluides, couplés par collision), d'un appareil beaucoup plus simple, offre en outre l'avantage de fournir directement les grandeurs physiques moyennes : densités, vitesses de dérive, observables expérimentalement. Elle donne du plasma une description plus fine que la méthode magnétohydrodynamique : on y suit le comportement de chaque type de particule (électrons, ions) et non seulement le comportement global du plasma, en tant que fluide ionisé continu.

Un deuxième chapitre est consacré à une étude théorique des collisions dans les plasmas à ions chauds. Les mécanismes de ralentissement et de la diffusion d'une particule dans un plasma à ions chauds ($T_i \gg T_e$) sont assez différents de ce qu'ils sont dans les plasmas à ions froids ($T_i \ll T_e$) ou à l'équilibre thermodynamique ($T_i = T_e$). Dans ceux-ci par exemple, un ion est freiné essentiellement par les autres ions; dans les plasmas à ions chauds, au contraire, ce sont les électrons qui provoquent, par collisions, le ralentissement.

Après une étude systématique de ces phénomènes, en fonction du rapport T_i / T_e et de la vitesse $\vec{u}$ de la particule-test, on a calculé la fréquence des collisions électrons-ions, $\frac{1}{\tau_e}(\vec{u})$ et sa valeur moyenne $\langle \frac{1}{\tau_e} \rangle = \langle \frac{1}{\tau_e}(\vec{u}) \rangle_{\vec{u}}$

Envisageant ensuite le cas où électrons et ions ont des vitesses de dérive, on a calculé le taux d'échange de quantité de mouvement (par collisions) électrons-ions $\vec{\Sigma}_e = -\vec{\Sigma}_i$, pour $T_i \neq T_e$ et des vitesses de dérive $\vec{u}_e$ et $\vec{u}_i$ quelconques (sans faire l'hypothèse, habituelle, que ces vitesses sont petites devant les vitesses d'agitation thermique). A $\vec{\Sigma}_e = -\vec{\Sigma}_i$ on peut associer (selon la définition introduite par Delcroix) une fréquence moyenne

de collision ν , qu'on a comparé à $\langle \ell \rangle$. Entre $T_e/T_i = 10^{-4}$ et $T_e/T_i = 10^4$, $\langle \ell \rangle$ et ν diffèrent au maximum d'un ordre de grandeur, ce qui autorise à parler de fréquences moyennes de collision, sans plus préciser.

On a établi enfin une expression de la résistivité électrique d'un plasma (complètement ionisé) qui généralise au cas $T_e \neq T_i$ avec éventuellement $T_e \gg T_i$, celles données par Spitzer ($T_e = T_i = T$) et par Braginskij ($T_e \neq T_i$, mais $T_e \neq T_i$).

Le premier problème pratique examiné en application des considérations théoriques précédentes est le régime permanent d'une "machine à miroirs" lorsque ne subsistent que les fuites à travers les lignes de force magnétiques, (chapitre 3). Les collisions en présence du champ magnétique $\vec{B}$ de confinement, provoquent une diffusion du plasma thermocyclotrope - à ions chauds - confiné, à travers les lignes de force de $\vec{B}$. Si cette fuite est compensée par une injection continue de particules, un régime permanent s'établit, qu'on a étudié.

Après avoir repris très rapidement le schéma classique de la vitesse de diffusion d'un plasma dans un champ magnétique, on calcule le profil de densité, $n(r)$, qui en résulte dans la machine à miroirs, en régime permanent. Les paramètres sont B , T_e , T_i et les dimensions géométriques de la bouteille.

On établit l'existence de plusieurs régimes de confinement en fonction du champ magnétique B , et on retrouve, en la justifiant et la précisant, la règle empirique : β - pression du plasma / "pression" magnétique < quelques %.

On donne enfin les expressions du courant de fuite et du temps de confinement moyen d'une particule, en fonction de la densité au centre de la bouteille, et des différents paramètres (B , T_e , T_i , dimensions de la bouteille).

La valeur très considérable (100 ampères/mètre de bouteille), du courant de fuite à travers les lignes de force magnétiques, pour une bouteille magnétique fonctionnant dans des conditions-type d'une machine à fusion nucléaire ($n_e = 10^{21} \text{ m}^{-3}$, $T_e = 5 \times 10^6 \text{ }^\circ\text{K}$), avec un champ de confinement de 10 teslas (100 000 gauss), montre qu'il faudra, soit réaliser des champs beaucoup plus élevés (pour 100 teslas, le courant de fuite n'est plus que de 1 A/m), soit avoir des courants d'injection très grands (de l'ordre de la centaine d'ampères au moins).

Les fuites transverses ne constituent donc pas un phénomène secondaire (même si jusqu'à présent elles ont été masquées par des pertes encore plus considérables, par instabilités, en particulier), mais un phénomène essentiel, dans la technologie d'un éventuel réacteur thermonucléaire.

Un quatrième chapitre enfin est consacré à une deuxième application : la neutralisation d'un faisceau d'ions par injection d'électrons, question qui intéresse à la fois la recherche sur la fusion contrôlée (pour l'injection d'ions de grande énergie dans une machine à miroirs) et la propulsion ionique.

Tenant compte des agitations thermiques électronique et ionique, ainsi que de la réaction du faisceau d'ions (macroscopique : oscillations ioniques, et microscopique : collisions) on examine d'abord la possibilité de réaliser, par injection dans un faisceau d'ions (densité n_{i0} , vitesse moyenne $\bar{v}_{i0}$) d'électrons en densité $n_{e0} \approx n_{i0}$ ayant une vitesse moyenne - initiale - $\bar{v}_{e0} \approx \bar{v}_{i0}$, un faisceau neutralisé (tel qu'il est exigé par les deux applications), stable. On cherche pour cela la réponse du faisceau mélangé à de petits signaux : faibles écarts, au niveau de l'injection, à la neutralité en charge ou en courant. Les oscillations ioniques sont alors négligeables et l'étude des oscillations électroniques amène à distinguer les deux types d'applications :

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

Accélération des plasmas

Vu et approuvé :

Paris, le 5 avril 1962.

LE DOYEN DE LA FACULTÉ DES SCIENCES,

M. ZAMANSKY

Vu et permis d'imprimer :

LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE DE PARIS,

JEAN ROCHE
